

# Diseño de Observadores Asintóticos para Sistemas de Eventos Discretos Basado en el Modelo de Error de Estimación

## *Asymptotic Observer Design for Discrete Event Systems Based on Estimation Error Model*

Antonio Ramírez Treviño, Luis Aguirre Salas y Ofelia Begovich

Centro de Investigación y Estudios Avanzados, Guadalajara  
Prol. López Mateos Sur 590, CP. 45090, Guadalajara, Jalisco  
E-mails: {art, jalil, obegovi}@gdl.cinvestav.mx

*Artículo recibido en Junio 22, 2001; aceptado en Febrero 19, 2002*

## Resumen

*En este trabajo se presenta una metodología para diseñar observadores asintóticos para Sistemas de Eventos Discretos modelados con Redes de Petri Interpretadas (RPI) cíclicas, vivas y acotadas. Esta metodología se desprende del análisis de convergencia realizado sobre el modelo del error de estimación, el cual es representado como una RPI.*

**Palabras clave:** Sistemas de Eventos Discretos, Observabilidad, Diseño de Observadores, Redes de Petri Interpretadas.

## Abstract

*This paper presents a methodology to design asymptotic observers for Discrete Event Systems (DES) modeled by cyclic, live and bounded Interpreted Petri Nets (IPN). This methodology is derived from a convergence analysis on the estimation error model, which is also represented as an IPN.*

**Keywords:** Discrete Event Systems, Observability, Observer design, Interpreted Petri Nets.

## 1 Introducción

En muchos sistemas de eventos discretos (*SED*) en general no es posible contar con un sensor para cada estado del sistema, ya sea por razones económicas, por evitar tener complicados sistemas de comunicación o simplemente porque no es posible realizar tales mediciones. En estos casos, si es necesario conocer la información interna del sistema, es indispensable el uso de una entidad llamada observador. El observador permite estimar los estados que no pueden ser medidos directamente. Los observadores son ampliamente usados en sistemas tolerantes a fallas y en controladores con retroalimentación de estado estimado (Fanni et al.1997). Para diseñar un observador es necesario verificar que el sistema posee la propiedad de observabilidad (Rivera-Rangel et al. 2000).

Los problemas de observabilidad y de diseño de observadores de los *SED* han sido estudiados utilizando diferentes herramientas formales de modelado. Por ejemplo, en sistemas modelados por Autómatas Finitos (*AF*) se tienen los siguientes trabajos: en (Li y Wonham 1988), estudian el problema de observabilidad en sistemas bajo observaciones parciales de eventos. En dicho trabajo, un sistema se dice observable si permite aplicar la misma ley de control para palabras que se observan igual a la salida. Por otro lado, en (Kumar et al. 1998; Ushio 1997), se aborda el problema de observabilidad en el diseño de supervisores cuando no todas las señales son observables. En Cüneyt-Özveren y Willsky 1990) se propone un observador llamado "resiliente", los cuales permiten conocer el estado del sistema únicamente en ciertos instantes. Sin embargo, aunque los *AF* se utilizan para modelar *SED*, su uso se encuentra limitado a sistemas de tamaño pequeño y en donde la semántica de entrelazado es suficiente para describir el paralelismo. Para evitar estos inconvenientes, numerosos grupos de investigación están utilizando las *RP* como herramienta de modelado, las cuales permiten capturar las principales características de los *SED*, tales como

\*Este trabajo ha sido apoyado por el proyecto CONACyT 29278-A

conurrencia, sincronización y exclusión mutua, entre otras. Además de capturar estas características, las *RP* poseen una representación gráfica sencilla y un soporte matemático basado en el álgebra lineal, lo que las hace adecuadas para el modelado y análisis de *SED* (Desel y Esparza 1995). Utilizando esta herramienta de modelado, en (Ishikawa e Hiraishi 1987) se estudia el problema de observabilidad en sistemas con observaciones parciales de estados y eventos, proponiendo un algoritmo para calcular un conjunto de posibles marcados iniciales de una red. En (Fanni et al.1997) se presenta un algoritmo que permite calcular el estado inicial de una *RP* cuando la secuencia de eventos es conocida. Basándose en ese trabajo, (Aguirre et al. 1999) presentaron un método para diseñar un observador para Redes de Petri Interpretadas (*RPI*) binarias, donde todas las transiciones son medibles. En este caso, el observador se representa como una *RPI*, lo que facilita el análisis del par sistema-observador. En (Rivera-Rangel et al. 2000) se relaja la hipótesis de binaridad y se muestra una metodología para el diseño de observadores para *RPI* vivas, cíclicas y acotadas con eventos no medibles.

Desafortunadamente, en los trabajos anteriores se utilizan las posibles secuencias que el sistema puede realizar para demostrar la convergencia del observador, lo cual complica y limita el diseño de observadores. Para resolver este inconveniente, este trabajo propone un nuevo esquema de diseño de observadores. La metodología propuesta se desprende del análisis de convergencia realizado sobre el modelo del error de estimación, el cual es representado como una *RPI*. Como se verá más adelante, al efectuar el análisis de convergencia se encuentran condiciones que se debe satisfacer el observador para lograr que el estado estimado tienda al estado del sistema, estableciéndose los parámetros de síntesis del observador.

Este trabajo está organizado como sigue. La sección 2 introduce brevemente a las *RPI*. En seguida, en la sección 3 se presenta una definición de la propiedad de observabilidad en términos de las *RPI*. Posteriormente, se caracteriza a las *RPI* que exhiben dicha propiedad. En la sección 4, se presenta la contribución principal de este trabajo: el análisis de convergencia basado en el modelo del error de estimación, del cual se deriva una metodología para diseñar un observador asintótico. Así como un ejemplo ilustrativo. Finalmente se mencionan las conclusiones y trabajo futuro.

## 2 Redes de Petri Interpretadas

Esta sección presenta brevemente a las Redes de Petri Interpretadas (*RPI*) como una extensión de las Redes de Petri (*RP*). El lector puede consultar (Desel y Esparza 1995) para una información más detallada sobre

las *RP* y sus propiedades dinámicas como vivacidad, ciclicidad y acotamiento; para información detallada sobre las *RPI* se puede consultar (Aguirre et al. 1999). Formalmente una *RPI* se define como sigue.

**Definición 1** Una Red de Petri Interpretada (*RPI*) es una séptupla  $Q = (N, \Sigma, \Upsilon, \Phi, \lambda, D, \varphi)$  donde

- $N = (P, T, I, O, M_0)$  es una *RP* compuesta de lugares (conjunto  $P$ ), transiciones (conjunto  $T$ ), arcos de entrada a las transiciones (función  $I$ ), arcos de salida de las transiciones (función  $O$ ) y el marcado inicial de la red ( $M_0$ ),

- $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$  es el alfabeto de entrada a la red, donde  $\sigma_i$  es un símbolo de entrada de una transición,

- $\Upsilon = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_v\}$  es el alfabeto de salida de las transiciones de la red, donde  $\tau_i$  es un símbolo de salida de una transición.

- $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s\}$  es el alfabeto de salida de los marcados de la red, donde  $\phi_i$  es un símbolo de salida de un marcado,

- $\lambda : T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  es una función que asigna los símbolos de entrada a las transiciones, la cual tiene las siguientes restricciones:  $\forall t_j, t_k \in T, j \neq k$  si  $I(p_i, t_j) = I(p_i, t_k) \neq 0$  y ambas  $\lambda(t_j), \lambda(t_k) \neq \varepsilon$ , entonces  $\lambda(t_j) \neq \lambda(t_k)$ , donde  $\varepsilon$  representa un evento interno del sistema y  $p_i \in P$ ,

- $D : T \rightarrow \Upsilon \cup \{\varepsilon\}$  es una función que asigna los símbolos de salida a las transiciones de la red. Cuando una transición  $t_j$  es disparada, entonces el símbolo asociado a ella se presenta a la salida de la red.

- $\varphi : \mathbf{R}(N, M_0) \rightarrow \{\Phi \cup \{\varepsilon\}\}^q$  es una función que asigna los símbolos de salida a los marcados alcanzables de la red, donde  $\mathbf{R}(N, M_0)$  es el conjunto de alcanzabilidad de la red (Desel y Esparza 1995),  $\varepsilon$  representa una medición nula y  $q$  es el número de salidas disponibles. Cuando un marcado  $M_k$  es alcanzado, el vector  $\varphi(M_k)$  aparece a la salida de la red.

**Nota 2** En este trabajo, se utilizará el símbolo  $(Q, M_0)$  en vez de  $Q = (N, \Sigma, \Upsilon, \Phi, \lambda, D, \varphi)$  para enfatizar el hecho de que existe un marcado inicial en una *RPI*.

**Nota 3** Este trabajo se enfoca al caso donde la función  $\varphi$  es definida como  $\varphi : [\mathbb{Z}^+]^n \rightarrow [\mathbb{Z}^+]^q$  y puede ser representada como una matriz  $\varphi = [\varphi_{ij}]$  de dimensiones  $q \times n$ , donde el  $i$ -ésimo vector fila  $\varphi_i$  de  $\varphi$  es la transpuesta del vector elemental  $e_j$  si el marcado del  $j$ -ésimo lugar es disponible a la salida.

El alfabeto de entrada  $\Sigma$  de una *RPI* puede considerarse como un conjunto de señales de actuadores asignadas a las transiciones de la red. Similarmente, los alfabetos de salida  $\Upsilon$  y  $\Phi$  pueden verse como conjuntos de señales de sensores de eventos y sensores de estados,

respectivamente. En este contexto, es posible distinguir entre transiciones controlables y no-controlables, y entre nodos medibles y no-medibles de la red como se establece en las siguientes definiciones.

**Definición 4** Una transición  $t_i \in T$  es llamada **controlable** si  $\lambda(t_i) \neq \varepsilon$ , en otro caso  $t_i$  es llamada **no-controlable**. Un lugar  $p_i \in P$  es llamado **medible** si el  $i$ -ésimo vector columna de  $\varphi$  no es nulo (i.e.  $\varphi(\bullet, i) \neq 0$ ), en otro caso  $p_i$  es llamado **no-medible**. Una transición  $t_j \in T$  es llamada **medible** si  $D(t_j) \neq \varepsilon$ , en otro caso  $t_j$  es llamada **no-medible**.

Así,  $T = T_c \cup T_u$ , donde  $T_c$  y  $T_u$  son los conjuntos de transiciones controlables e incontrolables, respectivamente. Similarmente,  $T = T_m \cup T_{nm}$  y  $P = P_m \cup P_{nm}$ , donde  $T_m$  y  $P_m$  son los conjuntos de transiciones y lugares medibles, respectivamente; mientras  $T_{nm}$  y  $P_{nm}$  son los conjuntos de transiciones y lugares no-medibles, respectivamente.

En lo que sigue, los nodos medibles de una RPI se representarán con círculos o rectángulos claros, mientras que los no-medibles con círculos o rectángulos sombreados.

La evolución del marcado de una RPI está dada por las siguientes reglas: 1) una transición  $t_j \in T$  de una RPI está habilitada en el marcado  $M_k$  si  $\forall p_i \in P$ ,  $M_k(p_i) \geq I(p_i, t_j)$ ; 2) si  $\lambda(t_j) = a_i \neq \varepsilon$  está presente y  $t_j$  está habilitada, entonces  $t_j$  debe dispararse. Si  $\lambda(t_j) = \varepsilon$  y  $t_j$  está habilitada, entonces  $t_j$  puede ser disparada. Cuando una transición habilitada  $t_j$  es disparada en un marcado  $M_k$ , entonces un nuevo marcado  $M_{k+1}$  es alcanzado. Este hecho se representa como  $M_k \xrightarrow{t_j} M_{k+1}$ .

Una secuencia de disparos de una RPI  $(Q, M_0)$  es una secuencia  $\sigma = t_i t_j \dots t_k \dots$  tal que  $M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots M_w \xrightarrow{t_k} \dots$ . El vector de Parikh  $\vec{\sigma} : T \rightarrow \mathbb{Z}^+$  de la secuencia de disparo  $\sigma$  mapea cada transición  $t \in T$  al número de ocurrencias de  $t$  en  $\sigma$ . El marcado alcanzado desde  $M_0$  al disparar la secuencia  $\sigma$  se puede calcular con la ecuación de estados de una RPI, la cual se escribe como:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_0 + C v_k \\ y_{k+1} &= \varphi M_{k+1} \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $C$  es la matriz de incidencia de la red (Desel y Esparza 1995),  $v_k$  es el vector de Parikh de la secuencia  $\sigma$  y  $y_{k+1}$  es el vector de salida correspondiente al marcado  $M_{k+1}$ .

El conjunto de todas las secuencias de disparo de una RPI es llamado el lenguaje de disparo y formalmente se representa como  $\mathcal{L}(Q, M_0) = \{\sigma | \sigma = t_i t_j \dots t_k \text{ y } M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots M_w \xrightarrow{t_k} \dots\}$ . Similarmente, el lenguaje de entrada de  $(Q, M_0)$  es  $\mathcal{L}_{in}(Q, M_0)$

$= \{\lambda(t_i)\lambda(t_j)\dots\lambda(t_k) | t_i t_j \dots t_k \in \mathcal{L}(Q, M_0)\}$ , mientras que, el lenguaje de salida de  $(Q, M_0)$  es  $\mathcal{L}_{out}(Q, M_0) = \{\varphi(M_0)\varphi(M_1)\dots\varphi(M_w) | M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots \xrightarrow{t_k} M_w \text{ y } t_i t_j \dots t_k \in \mathcal{L}(Q, M_0)\}$ .

Dado que  $T = T_m \cup T_{nm}$ , de ahora en adelante, el vector de Parikh  $\vec{\sigma}$  de una secuencia  $\sigma$  es descompuesto como  $\vec{\sigma} = v_k^D + v_k^\varepsilon$ . Usando este vector, la ecuación de estados de una RPI puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k + C^D v_k^D + C^\varepsilon v_k^\varepsilon \\ y_k &= \varphi M_k \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $C = [C^D; C^\varepsilon]$ ,  $C^D$  está formada por las columnas correspondientes a las transiciones medibles y  $C^\varepsilon$  está formado por las columnas correspondientes a las transiciones no-medibles.

Algunas definiciones relacionadas con la estructura de una RPI que se usarán más adelante son:

**Definición 5** Dada una  $t_j \in T$ ,  $\bullet(t_j) = \{p_i \in P | I(p_i, t_j) \neq 0\}$  y  $(t_j)^\bullet = \{p_i \in P | O(p_i, t_j) \neq 0\}$  son los conjuntos de los lugares de entrada y salida de  $t_j$  respectivamente. Similarmente, dado un  $p_i \in P$ ,  $\bullet(p_i) = \{t_j \in T | O(p_i, t_j) \neq 0\}$  y  $(p_i)^\bullet = \{t_j \in T | I(p_i, t_j) \neq 0\}$  son los conjuntos de transiciones de entrada y de salida de  $p_i$  respectivamente.

**Definición 6** Un  $p$ -semiflujo  $Y$  es cualquier solución racional no negativa de la ecuación  $Y^T C = 0$ , donde  $C$  es la matriz de incidencia de la RPI.

### 3 Observabilidad en RPI

Generalmente, en una RPI existen relaciones entre los marcados de sus lugares. Por ejemplo, los  $p$ -semiflujos de la red indican los lugares donde la suma ponderada de sus marcados permanece constante. En general, a las relaciones lineales entre los marcados de los lugares serán denominadas Leyes Conservativas de Marcado (LCM).

**Definición 7** Sean  $(Q, M_0)$  una RPI y  $M(p_j)$  un marcado alcanzable del lugar  $p_j$  en  $(Q, M_0)$ . El conjunto de ecuaciones:  $LCM = \{\sum_{j=1}^n \alpha_j^i M(p_j) = k_i | i \in [1, \dots, s], \alpha_j^i \in \mathbb{Z}^+\}$  donde  $s$  es el número de ecuaciones y  $\forall \alpha_k^i \neq 0$  se cumple que  $k_i / \alpha_k^i$  es un valor entero, forman un conjunto de Leyes Conservativas de Marcado (LCM) si cada lugar no-medible está contenido en al menos una ecuación (i.e. si  $p_j$  es un lugar no medible, entonces  $\exists i$  tal que  $\alpha_j^i \neq 0$ ).

La cota superior de marcado  $\mathbb{K}_j$  para un lugar  $p_j$  no-medible está definida como:  $\mathbb{K}_j = \min\{k_i / \alpha_j^i | \alpha_j^i \neq 0, i \in [1, \dots, s]\}$ . Note que  $\mathbb{K}_j$  siempre está definida.

El concepto de *LCM* es análogo al concepto de macro-marcado de (Fanni et al.1997). Este conjunto de ecuaciones se obtiene del conocimiento de la estructura de la *RPI*, el número de máquinas existentes, de la capacidad máxima de los almacenes y de las máquinas, etc.

Siguiendo las definiciones existentes en la literatura en *RPI*, la observabilidad queda definida como sigue.

**Definición 8** Una *RPI*  $(Q, M_0)$  es *observable a  $k$  pasos* si  $\forall \omega \in \mathcal{L}_{in}(Q, M_0)$  existe una secuencia de disparos finita  $z$ , tal que  $\omega z \in \mathcal{L}_{in}(Q, M_0)$ ,  $|z| < k < \infty$  y la información proporcionada por  $\omega z$ , la palabra de salida generada por  $\omega z$ , un conjunto *LCM* y la estructura del sistema son suficientes para calcular  $M_0$ .

Note que  $\omega$  puede ser una palabra cíclica pero que al agregarle una secuencia de disparos finita  $z$ , la palabra resultante  $\omega z$  se acota. Por otro lado, el conocimiento de un conjunto *LCM* permite establecer las cotas superiores de los marcados de los lugares, con lo cual se facilita la estimación de su marcado real, como se verá más adelante.

A continuación se presentan condiciones suficientes para determinar si una *RPI* es observable o no. Esta caracterización está basada en dos propiedades, la primera es la "evento-detectabilidad" y la segunda es la "marcado-detectabilidad". Estas propiedades se definen a continuación.

**Definición 9** Una *RPI* dada por  $(Q, M_0)$  y descrita por la ecuación de estados (2) es *evento-detectable* si los disparos de cualquier par de transiciones  $t_i, t_j$  de  $(Q, M_0)$  son distinguibles entre sí.

**Definición 10** Sea  $(Q, M_0)$  una *RPI* con  $M_0$  no necesariamente conocido. Si  $\forall M_i$ , tal que  $M_0 \xrightarrow{\omega z} M_i$  donde  $\omega z \in \mathcal{L}_{in}(Q, M_0)$ ,  $\omega \in \mathcal{L}_{in}(Q, M_0)$  y  $|z| < k < \infty$ ,  $M_i$  puede ser determinado de forma única entonces  $(Q, M_0)$  es *marcado-detectable*.

En los siguientes párrafos se caracterizan a las *RPI* que poseen estas propiedades.

**Proposición 11** Sea  $(Q, M_0)$  una *RPI* descrita por la ecuación de estados (2).  $(Q, M_0)$  es *evento-detectable* si y sólo si todas las columnas de  $\varphi C^E$  son no nulas y diferentes entre sí.

La prueba de esta proposición se encuentra en (Rivera-Rangel et al. 2000). De la anterior proposición se sigue que la propiedad de evento-detectabilidad se puede probar estudiando la estructura de la *RPI* a través de un algoritmo de complejidad polinomial.

Para caracterizar las *RPI* que presentan la propiedad de marcado-detectabilidad, en el caso general, es necesario introducir el concepto de distancia sincrónica entre las transiciones de la red (Desel y Esparza 1995).

**Definición 12** La distancia sincrónica de una transición  $t_i$  con respecto a la transición  $t_j$  en una *RPI* dada,  $(Q, M_0)$ , es el valor máximo de la diferencia entre el número de disparos de las transiciones  $t_i$  y  $t_j$  considerando todas las posibles secuencias de disparo  $\sigma$ . Este valor se representa como  $SD(Q, M_0; t_i, t_j) = \max_{\sigma \in \mathcal{L}(Q, M_0)} \{ \bar{\sigma}(t_i) - \bar{\sigma}(t_j) \}$ .

El concepto de la distancia sincrónica entre dos transiciones puede ser extendido a conjuntos de transiciones de la siguiente forma: si  $S_1, S_2$  son dos conjuntos de transiciones, entonces  $SD(Q, M_0; S_1, S_2)$  es el máximo valor de la diferencia entre el número de disparos de las transiciones de  $S_1$  y  $S_2$ , considerando todas las posibles secuencias de disparo. El siguiente teorema caracteriza a las *RPI* marcado-detectables.

**Proposición 13** Sea  $(Q, M_0)$  una *RPI* cíclica, acotada y viva, donde una *LCM* está definida. Si  $(Q, M_0)$  es evento detectable y  $\forall p_j \in P_{nm}$  se cumple que  $SD(Q, M_0; \bullet(p_j), (p_j)\bullet) = \mathbb{K}_j$  entonces  $(Q, M_0)$  es *marcado-detectable*.

**Demostración.** Por hipótesis,  $\forall p_j \in P_{nm}$ , existe una secuencia  $\sigma_1$  con la propiedad de que el número de disparos de transiciones en  $\bullet(p_j)$  sin disparar transiciones en  $(p_j)\bullet$  es igual a  $\mathbb{K}_j$ , porque  $SD(Q, M_0; \bullet(p_j), (p_j)\bullet) = \mathbb{K}_j$ . Cuando esta secuencia es disparada se tiene que  $M_{\sigma_1}(p_j) = \mathbb{K}_j$ . Este hecho se puede detectar porque la *RPI* es evento-detectable. En este marcado se utiliza la ley conservativa de marcado  $\sum_{s=1}^n \alpha_s^i M(p_s) = k_i$  cumpliendo con  $\mathbb{K}_j = k_i / \alpha_j^i$  para conocer el marcado real de todos los lugares que también pertenecen a dicha ley. Esto se debe a que cuando  $\sigma_1$  ocurre, se cumple que  $M_{\sigma_1}(p_j) = \mathbb{K}_j$  y  $\forall p_i$  con  $i \neq j$  tal que  $\alpha_j^i \neq 0$ ,  $M_{\sigma_1}(p_i) = 0$ . Dado que la  $(Q, M_0)$  es evento-detectable, entonces el disparo de cualquier transición  $t_k$  es conocido y por tanto, también el número de marcas que esta agrega o elimina. Por tanto, para los lugares cuyo marcado ya es conocido, se cumple que también se conocerá su marcado en cualquier otro instante.

Ahora, como  $(Q, M_0)$  es cíclica, acotada y viva, el marcado inicial será eventualmente alcanzado y el mismo procedimiento puede ser utilizado para encontrar el marcado del resto de los lugares no medibles  $p_m$  hasta que el marcado real en todos los lugares sea conocido. Por tanto  $(Q, M_0)$  es *marcado-detectable*.

La proposición anterior utiliza el concepto de la distancia sincrónica, y su caracterización depende del marcado inicial, el cual es desconocido. Sin embargo, se ha observado que, para una amplia clase de *RPI*, la propiedad de distancia sincrónica (y por ende la propiedad de marcado-detectable) depende de la estructura de la red, como lo establece el siguiente corolario.

**Corolario 14** Sea  $(Q, M_0)$  una RPI viva y estructuralmente acotada, la cual pertenece a la clase de redes de libre elección, donde el número de marcas en cada p-semiflujo es conocido. Si  $(Q, M_0)$  es evento-detectable entonces es marcado-detectable.

**Demostración.** Como  $(Q, M_0)$  es estructuralmente acotada, entonces cada lugar de  $Q$  pertenece a alguna p-componente (Desel y Esparza 1995), y como el número de marcas en los p-semiflujos es conocido, entonces el conjunto de p-semiflujos forman una LCM. La LCM puede ser ordenada como:

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 M(p_1) + \dots + \alpha_n^1 M(p_n) &= k_1 \\ \vdots & \\ \alpha_1^w M(p_1) + \dots + \alpha_n^w M(p_n) &= k_w \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $[\alpha_1^i \dots \alpha_n^i]^T$  es el  $i$ -ésimo p-semiflujo. Para cada lugar  $p_j$ , el siguiente marcado puede ser calculado:

$$\begin{aligned} M_k(p_j) &= \max M(p_j) \\ &\text{s.t.} \\ \alpha_1^1 M(p_1) + \dots + \alpha_n^1 M(p_n) &= k_1 \\ \vdots & \\ \alpha_1^w M(p_1) + \dots + \alpha_n^w M(p_n) &= k_w \\ \forall p_i \in P, M(p_i) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Usando el teorema 5.9 de (Desel y Esparza 1995), se sabe que para el caso tratado existirá una secuencia  $\sigma$  que hará que el marcado  $M(p_j) = \mathbb{K}_j$  se alcance, donde  $\mathbb{K}_j$  es la cota máxima de  $p_j$ . Con la existencia de  $\sigma$  entonces se puede utilizar la proposición 13 para comprobar que el marcado de todos los lugares será conocido para algún marcado futuro, garantizando que  $(Q, M_0)$  es marcado-detectable.

De los resultados anteriores se desprende la siguiente caracterización de las RPI observables.

**Teorema 15** Sea  $(Q, M_0)$  una RPI cíclica, viva y acotada donde una LCM está definida. Si  $(Q, M_0)$  es evento-detectable y marcado-detectable entonces  $(Q, M_0)$  es observable.

**Demostración.** Como  $(Q, M_0)$  es evento-detectable y marcado-detectable, entonces existe una secuencia disparable de transiciones  $\eta_i$  y un marcado  $M_i$  tal que  $M_0 \xrightarrow{\eta_i} M_i$ , donde  $M_i$  y  $\eta_i = t_1 t_2 \dots t_q$  son conocidos. En este caso  $M_0$  puede ser calculado resolviendo recursivamente el siguiente conjunto de ecuaciones:  $M_{i-1} = M_i - C \vec{t}_q$ ; ... ;  $M_1 = M_2 - C \vec{t}_2$ ;  $M_0 = M_1 - C \vec{t}_1$ .

Note que los términos  $C \vec{t}_1, C \vec{t}_2, \dots, C \vec{t}_q$  son conocidos. Más aún, si la longitud de  $\eta_i$  no es finita, dado que la red es finita, algunas secuencias se están repitiendo

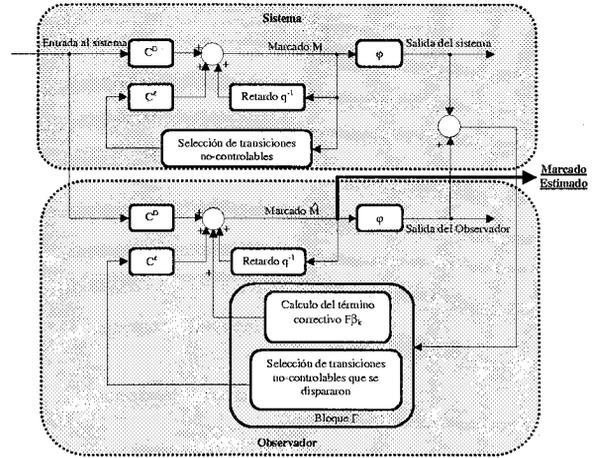


Figura 1: El esquema del par sistema-observador.

(Hopcroft y Ullman 1979), por lo que pueden ser omitidas de  $\eta_i$ , obteniéndose una secuencia de longitud finita. Finalmente, como  $M_0$  puede ser calculado usando la información de entrada y salida del sistema, así como de su estructura y el conjunto LCM, entonces  $(Q, M_0)$  es observable.

## 4 Diseño de observadores

Para calcular el marcado actual del sistema, se adoptó la arquitectura del observador presentada en la figura 1. El observador es una copia de la red del sistema a la cual se le ha añadido el bloque "Gamma" cuyo objetivo es corregir el error de estimación del marcado a través de un vector de disparo  $\vec{\gamma}_k + \vec{\beta}_k$ .

Usando este esquema, como se verá más adelante, el marcado inicial de una amplia clase de RPI puede ser completamente determinado. El observador asintótico propuesto se define como sigue.

**Definición 16** Sea  $N_S = (Q, M_0)$  una RPI que modela a un SED con ecuación de estados dada por

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k + C^D v_k^D + C^\epsilon v_k^\epsilon \\ y_k &= \varphi M_k \end{aligned} \quad (5)$$

tal que se conoce sólo el marcado de los lugares medibles y un conjunto LCM. Entonces la RPI del observador  $N_O = (Q', \hat{M}_0)$  de  $N_S$  se construye como una copia de la red  $N_S$  a la cual se le han añadido algunas transiciones, cuya ecuación de estado es

$$\begin{aligned} \hat{M}_{l+1} &= \hat{M}_l + C^D v_k^D + \Gamma(\varphi \hat{M}_l - \varphi M_k) \\ \hat{y}_k &= \hat{M}_{l+1} \end{aligned} \quad (6)$$

donde todos los lugares son medibles y todas las transiciones son controlables y el marcado inicial es  $\hat{M}_0(p_i) = M_0(p_i)$  si  $p_i \in P_m$ , y  $\hat{M}_0(p_i) = \mathbb{K}_i$  si  $p_i \in P_{nm}$ .

En este contexto, el error de estimación es definido como  $e_k^i = \hat{M}_k - M_k$ . Mediante manipulación algebraica se obtiene la siguiente ecuación dinámica del error de estimación:

$$e_{k+1} = e_k + \begin{bmatrix} -C^\varepsilon & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k^\varepsilon \\ \varphi e_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

El error de observación se puede hacer cero si los valores de  $\Gamma$  y  $\varphi e_k$  son seleccionados adecuadamente, como se demuestra a continuación.

**Teorema 17** Sea  $N_S = (Q, M_0)$  una RPI evento-detectable que modela a un SED y  $\forall p_i \in P_{nm}$  se cumple que  $SD(Q, M_0; \bullet(p_i), (p_i)^\bullet) = \mathbb{K}_i$ . Sea  $N_O = (Q', \hat{M}_0)$  la red del observador de  $N_S$  con un marcado inicial  $\hat{M}_0$  como el descrito en la definición 16. Entonces existe una secuencia de disparo en el observador tal que la ecuación del error (7) alcanza el cero.

**Demostración.** Sea  $\Gamma = \begin{bmatrix} C^\varepsilon & F \end{bmatrix}$ , donde  $F = -I$  (la matriz identidad negativa) y  $\varphi e_k = \begin{bmatrix} v_k^\varepsilon \\ \beta_k \end{bmatrix}$ . Debido a que  $N_S$  es evento-detectable, el valor de  $v_k^\varepsilon$  se puede determinar. Bajo estas consideraciones, la ecuación de error se reduce a

$$e_{k+1} = e_k + F\beta_k \quad (8)$$

Por la forma en que se definió el marcado inicial del observador, la ecuación (8) se puede ver como una RPI cuya matriz de incidencia es la matriz  $F$  y donde  $e_k \geq 0$ . Puesto que,  $F$  es igual a  $-I$ , entonces cada lugar del observador tiene una transición de salida adicional. En este caso, si  $e_k(p_i) = 0$  no es necesario disparar su transición adicional, i.e.  $\beta_k(p_i) = 0$ ; en cambio, si  $e_k(p_i) > 0$ , basta con proponer  $\beta_k(p_i) = 1$  para reducir el error de estimación, i.e.  $e_{k+1}(p_i) = e_k(p_i) - 1 < e_k(p_i)$ . Sin embargo, el marcado inicial de los lugares no medibles es desconocido y por lo tanto el error también. En este caso, por construcción de  $\hat{M}_0$  se tiene que  $e_0(p_i) = \hat{M}_0(p_i) - M_0(p_i) = \gamma_i$ , donde  $0 \leq \gamma_i \leq \mathbb{K}_i$ . Como el disparo de cualquier transición  $t_j$  del sistema (y de su copia en el observador) agrega o remueve la misma cantidad de marcas en ambas redes, entonces el error no disminuiría, a menos que las transiciones dadas en la matriz  $F$  fueran disparadas. En este caso, al disparar  $t_k$  se tiene que  $\hat{M}_1(p_i) = \hat{M}_0(p_i) + O(p_i, t_j) - I(p_i, t_j) - \beta_0(p_i) \geq M_1(p_i)$ . Si  $\hat{M}_0(p_i) + O(p_i, t_j) - I(p_i, t_j) > \mathbb{K}_i$  y  $\beta_0(p_i) = 0$ , entonces  $e_1(p_i) = \hat{M}_0(p_i) - M_0(p_i) = e_0(p_i) > 0$  ya que  $\forall k M_k(p_i) \leq \mathbb{K}_i$ . En cambio, si  $\beta_0(p_i) = 1$ ,

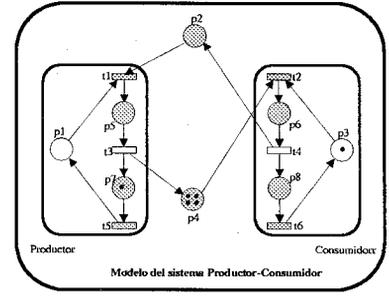


Figura 2: Sistema productor-consumidor.

$e_1(p_i) = \hat{M}_0(p_i) - M_0(p_i) - 1 = e_0(p_i) - 1 < e_0(p_i)$ . Lo anterior sugiere definir  $\beta_k(p_i)$  como sigue:

$$\beta_k(p_i) = \begin{cases} \hat{M}_k > \mathbb{K}_i & \\ 1, & \text{y } t_j \text{ es disparada} \\ & \text{en } N_S \text{ y } N_O \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9)$$

Ahora se demuestra que con  $\beta_k(p_i)$  definida de este modo, el error es decreciente y alcanza el valor cero. Como  $p_i \in P_{nm}$  se cumple que  $SD(Q, M_0; \bullet(p_i), (p_i)^\bullet) = \mathbb{K}_i$ , entonces las transiciones en  $\bullet(p_i)$  pueden dispararse  $\mathbb{K}_i$  veces sin disparar las transiciones en  $(p_i)^\bullet$ , entonces existe un marcado  $M_q$  tal que  $M_q(p_i) = \mathbb{K}_i$ . Por otro lado, debido a que  $M_0(p_i) = \hat{M}_0(p_i) - \gamma_i$ , al empezar a ganar marcas el lugar  $p_i$ , se llegará a un marcado  $M_h(p_i) = \mathbb{K}_i - \gamma_i + 1$ , con  $0 \leq h \leq q$ . En este momento se tiene que  $\hat{M}_h(p_i) = \hat{M}_0 + 1 - \beta_h(p_i) = \mathbb{K}_i + 1 - \beta_h(p_i) = \mathbb{K}_i$  y entonces  $e_h(p_i) = \mathbb{K}_i - (\mathbb{K}_i - \gamma_i + 1) = \gamma_i - 1$  reduciéndose el error. Conforme el lugar  $p_i$  del sistema gane más marcas, su copia en el observador ya no ganará más marcas (por efecto de  $\beta_k(p_i)$ ), de manera que cuando  $M_q(p_i) = \mathbb{K}_i$  entonces  $\hat{M}_q(p_i) = \mathbb{K}_i$  y  $e_q(p_i) = 0$ . Como esto ocurre para cualquier lugar no-medible, entonces el error de observación convergerá a cero.

El teorema anterior es la principal contribución de este artículo, ya que mediante el modelo del error de estimación puede verificarse que el estado estimado converge al estado del sistema. Además, la demostración de este teorema proporciona una metodología sencilla para diseñar un observador asintótico. Por lo que, el observador queda definido como

$$\hat{M}_{k+1} = \hat{M}_k + \begin{bmatrix} C^D & C^\varepsilon & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k^D \\ v_k^\varepsilon \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{M}_{k+1}$$

donde  $\beta_k$  se define como en la ecuación (9).

**Ejemplo 18** Considere el modelo en RPI del esquema productor-consumidor de la figura 2. Note que

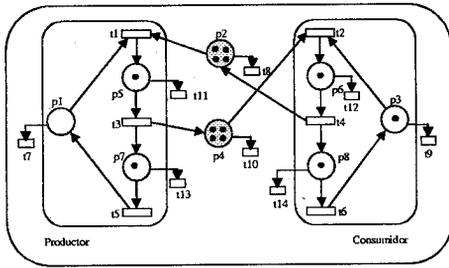


Figura 3: Observador del sistema productor-consumidor

$P_m = \{p_1, p_3\}$  y  $T_m = \{t_3, t_4\}$ . Se puede demostrar que la red es evento-detectable. La red pertenece a la clase de redes de libre elección y, dado su marcado inicial  $M_0 = [00140010]^T$ , la red es una viva, cíclica y acotada. En consecuencia, por el corolario 14, la red es marcado-detectable. Así, de lo anterior y del teorema 15, la red es observable. La figura 3 muestra la RPI del observador para el sistema considerado. Note que la red del observador es una copia del sistema más las transiciones de salida de los lugares. Las siguientes ecuaciones, que son obtenidas de los  $p$ -semiflujos de la red, forman un conjunto de leyes conservativas de marcado:  $LMC = \{M(p_2) + M(p_4) + M(p_5) + M(p_6) = 4, M(p_1) + M(p_7) = 1, M(p_3) + M(p_6) + M(p_8) = 1\}$ . Utilizando estas ecuaciones y un algoritmo simplex, las siguientes cotas máximas de marcado son obtenidas  $\mathbb{K} = [14141111]^T$ . Así, el marcado inicial del observador es:  $\hat{M}_0 = [04141111]^T$ .

Suponga que  $t_2$  es disparada en  $N_S$ , entonces  $M_1 = [00030110]^T$  es alcanzado. Como  $N_S$  es evento-detectable y  $t_2$  está habilitada en  $N_O$ , entonces  $t_2$  es disparada y  $\hat{M}_1 = [04031211]^T$  es alcanzado en  $N_O$ . Este marcado excede la cota  $\mathbb{K}_6$  de  $p_6$ , por tanto  $\beta_1 = \overline{t_{12}}$  es disparada y  $\hat{M}_1 = [04031111]^T$  es alcanzado. Si  $t_4$  es disparada en  $N_S$ , se alcanza  $M_2 = [01030011]^T$ . La transición  $t_4$  también es disparada en  $N_O$  alcanzándose.  $\hat{M}_2 = [05031012]^T$ . Este marcado excede las cotas  $\mathbb{K}_2$  y  $\mathbb{K}_8$ , por tanto  $\beta_2 = \overline{t_{8t_{14}}}$  es disparada alcanzándose  $\hat{M}_2 = [04031011]^T$ . Continuando de esta manera, después del disparo de las secuencias  $\alpha_k = t_2t_4t_6t_2t_4t_6t_2t_4t_6t_2t_4t_5t_1$  en  $N_S$  y  $\sigma_K = t_2t_{12}t_4t_8t_{14}t_6t_2t_4t_8t_6t_2t_4t_8t_6t_2t_4t_8t_5t_1t_{11}$  en  $N_O$ ,  $M = \hat{M} = [03011000]^T$ , con lo que el error de estimación es cero.

### 5 Conclusiones

En este trabajo se presentó una caracterización de la observabilidad en los sistemas de eventos discretos modelados con Redes de Petri Interpretadas cíclicas, vivas

y acotadas. El resultado principal de este trabajo consistió en mostrar que el error de estimación se puede modelar como una ecuación dinámica equivalente a una RPI. Además que existe una secuencia de disparos  $\beta$  en este modelo del error, que hace que su marcado converja a cero, asegurándose así la convergencia del observador. Estos resultados permitieron establecer un procedimiento para diseñar observadores asintóticos de una manera simple.

Como trabajo futuro se estudiarán las condiciones bajo las cuales se puede aumentar la razón de convergencia del observador. También se contempla estudiar el problema de asignación de un número mínimo de sensores a una RPI tal que se preserve la propiedad de observabilidad.

### 6 Bibliografía

Aguirre L., Ramírez A. y Begovich O., "Design of asymptotic observers for discrete event systems". In *IASTED International Conference on Intelligent Systems and Control*. Santa Barbara, USA, 1999, pp. 188-193.

Cüneyt-Özveren M. y Willsky A., "Observability of discrete event dynamic systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 7, 1990, pp. 797-806.

Desel J. y Esparza, J., *Free choice Petri nets*. Cambridge University Press, Gran Bretaña, 1995.

Fanni A., Giua A. y Sanna N., "Control and error recovery of Petri net models with event observers". In *2nd International Workshop on Manufacturing and Petri Nets*, France, 1997, pp. 53-68.

Hopcroft J. y Ullman J., *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley Publishing Company, EEUU, 1979

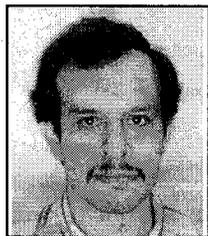
Ichikawa A. y Hiraishi K., "Analysis and control of discrete event systems with irregular observations". *Lecture notes in control and information sciences*, Vol. 103, Springer Verlag, 1987, pp. 115-134.

Kumar R. y Shayman M., "Formulae relating controllability, observability and co-observability". *Automatica*, Vol. 2, 1998, pp. 211-215.

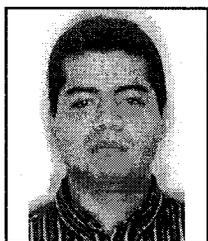
Li Y. y Wonham M., "Controllability and observability in the state-feedback control of discrete event systems". In *IEEE Conference on Decision and Control*, 1988, pp. 203-208.

Rivera-Rangel I., Aguirre-Salas L., Ramírez-Treviño A. y Lopez-Mellado E., "Observer Design for Discrete Event Systems Modeled by Interpreted Petri Nets". In *IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000, pp 2260-2265.

Ushio T., "On the existence of finite-state supervisors under partial observations". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 11, 1997, pp. 1577-1581.



**Antonio Ramírez Treviño** nació en Monterrey, N.L. Cursó sus estudios de ingeniería en la UAM-Atzacapozalco donde obtuvo el título de Ingeniero en Electrónica en 1986 en México DF. El grado de Maestría en Ciencias le fue otorgado por el Cinvestav- IPN en la Ciudad de México en 1990. El grado de Doctor lo obtuvo en la Universidad de Zaragoza, en 1993 en Zaragoza, España. Desde 1994 es investigador en el Cinvestav-Guadalajara. Sus áreas de interés están relacionadas con los Sistemas de Eventos Discretos específicamente: Observabilidad, Control, Identificación y Scheduling en Sistemas Modelados con Redes de Petri.



**Luis Aguirre Salas**, en 1999 obtuvo el grado de Maestro en Ciencias. Actualmente estudia el programa de doctorado en ciencias en el CINVESTAV del IPN unidad Guadalajara, México. Sus áreas de interés son la Observabilidad, el Diseño de Observadores Asintóticos y la Selección de sensores necesarios para preservar la observabilidad en sistemas de eventos discretos modelados con Redes de Petri Interpretadas.



**Ofelia Begovich**, nació en la Ciudad de México. Cursó sus estudios de ingeniería en ESIME-INP donde obtuvo el título de Ingeniera en Comunicaciones y Electrónica en 1983 en México DF. El grado de Maestría en Ciencias le fue otorgado por el Cinvestav- IPN en la Ciudad de México en 1987. El grado de Doctora lo obtuvo en la Universidad de Rennes I, en 1992 en Rennes, Francia. Desde 1992 es investigadora en el Cinvestav, Guadalajara. Sus áreas de interés son: Control de Sistemas de Eventos Discretos, Control Lineal y el Control Difuso y sus aplicaciones respectivas a procesos físicos.

