

Un Nuevo Método de Explotar Relaciones de Preferencia Borrosas en Agentes de Decisión¹

A New Method for Exploiting Fuzzy Preference Relations in Decision Agents

Eduardo Fernández González¹ y Rafael Olmedo Pérez²

¹Escuela de Informática

²Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Autónoma de Sinaloa; México

{[eddyf.rolmedo](mailto:eddyf.rolmedo@uas.uasnet.mx)}@uas.uasnet.mx

Artículo recibido en abril 23, 2004; aceptado en julio 30, 2004

Resumen

El enfoque normativo de la decisión ha predominado en la concepción de agentes inteligentes capaces de resolver problemas de selección de alternativas. En el trabajo se discuten las limitaciones de este paradigma y se sustenta otro basado en relaciones de preferencia borrosas, cuyo defecto fundamental radica en el momento de explotar la relación de preferencia para llegar a una prescripción. Se propone un nuevo método de explotación basado en la solución de un problema de optimización multiobjetivo que se resuelve en dos pasos, empleando en uno de ellos un algoritmo evolutivo. La propuesta posee mejores propiedades que otros procedimientos anteriores inspirados en ideas similares, pues logra modelar mejor y más sencillamente las preferencias sobre los atributos en conflicto.

Palabras Clave: Agente de decisión, Relación de preferencia borrosa, Prescripción, Optimización multiobjetivo, Algoritmo evolutivo

Abstract

The normative approach for decision-making is the dominant paradigm in designing intelligent decision agents. We discuss here the advantages of a more flexible way based on fuzzy logic. However, most exploitation methods of fuzzy preference relations do not provide good prescriptions. Recently some approaches based on the idea of reducing inconsistencies using evolutionary multiobjective optimization have been proposed. In this work a new method is presented based on similar ideas but improving them. The multiobjective optimization problem is separated into two steps and solved with a better model of preferences, also using a simpler evolutionary algorithm. These improvements allow us to achieve better solutions in a simpler way than the previous methods.

Keywords: Decision agent, fuzzy preference relation, prescription, multiobjective optimization, evolutionary algorithm

1 Introducción

No existe una forma apriorística de actuar racionalmente en condiciones de conflicto de atributos e incertidumbre sobre las consecuencias de las alternativas. El comportamiento racional presupone actuar de manera eficiente para reducir la distancia entre el estado actual del mundo y el estado deseado; pero en condiciones de conflicto y riesgo, la idea misma de estado deseado es subjetiva, y requiere la modelación de preferencias y creencias del agente humano que interviene en el proceso de toma de decisiones. La vigencia de esta concepción en Inteligencia Artificial es, sin embargo, relativamente reciente (Pomerol, 1995). La construcción de agentes racionales ha privilegiado el enfoque normativo de la decisión, con asiento principal en los Estados Unidos de Norteamérica y Gran Bretaña (ver por ejemplo ((Keeney y Raiffa, 1976), (Howard y Matheson, 1984), (French, 1986)). Sobre la base de un conjunto de axiomas, aceptables de modo individual pero que unidos constituyen un esquema para muchos rígido, el enfoque normativo crea una función de valor o utilidad para comparar las alternativas y realizar una prescripción. Como contraparte, existen métodos para tomar decisiones sobre la base de relaciones "borrosas" de preferencia (Fodor y Roubens, 1994); en cierto sentido las relaciones borrosas son una buena alternativa de compromiso al enfoque funcional, pues generalizándolo, tienen mayor capacidad de expresión y son un buen

¹ Esta investigación cuenta con el apoyo de CONACYT

modelo para fenómenos de intransitividad e incomparabilidad. El modelo de preferencias “borrosas” es más general y más flexible que su contraparte, y es en nuestra opinión más efectivo cuando el agente software debe resolver problemas de decisión con preferencias mal definidas (por ejemplo, de grupos de decisores humanos), o trabajar con información esencialmente incompleta e imprecisa.

Dotar a un agente software de capacidad para resolver un problema de selección de alternativas utilizando relaciones borrosas de preferencia requiere el diseño de dos procedimientos independientes:

- la construcción de la relación binaria borrosa de preferencias
- la explotación de la relación para llegar a prescribir cuál o cuáles son las mejores alternativas, o incluso para proponer un ranking del conjunto de decisión.

La relación borrosa de preferencia es un modelo global de preferencias y creencias del agente humano que el agente software debe reflejar. Se reportan numerosos métodos para el caso multicriterio, decisión en condiciones de incertidumbre y en grupo. El interés de este trabajo, además de justificar el empleo de relaciones borrosas en la concepción de los agentes que resuelven problemas complejos de selección de alternativas, se centra en la fase de explotación, el aspecto más débil de los métodos de decisión sobre preferencias borrosas. Es que la falta de transitividad y las frecuentes incomparabilidades complican llegar a una prescripción consistente con la información contenida en la relación borrosa. Se han propuesto muchas técnicas (por ejemplo, (Fodor y Roubens, 1994), (Perny y Roy, 1992)), pero ninguna parece preferible (Bouyssou y Vincke, 1995). Su principal defecto es que la posición de cualquier par de acciones en el ordenamiento final no está determinada por el grado de credibilidad de la preferencia que las relaciona; otras alternativas influyen fuertemente sobre su posición relativa. De aquí se derivan dos consecuencias negativas:

- el ordenamiento final muchas veces no respeta las preferencias del Decision Maker (DM) recogidas en la relación de preferencias que conecta la pareja de acciones (a,b), y
- la posición relativa de las acciones puede cambiar si otras alternativas son consideradas o no dentro del conjunto sobre el cual se realiza la explotación de la relación borrosa de preferencia.

Estos defectos conducen a ciertas situaciones irracionales: primero, a violaciones de la información preferencial que se puede derivar de la relación borrosa (por ejemplo, es alto el grado de credibilidad de la preferencia de una acción sobre otra y sin embargo la segunda acción queda antes que la primera en el orden final); las violaciones de esta naturaleza deberían minimizarse. Segundo, a dependencia respecto a las alternativas irrelevantes en el sentido del clásico axioma de Arrow (Arrow y Reynaud, 1986). Un análisis más profundo de estas críticas y de su impacto sobre la calidad de un proceso de decisión aparece en (Fernández y Leyva, 2002).

Recientemente se propusieron dos formas diferentes de actuar sobre esas dificultades (Leyva y Fernández, 1999), (Fernández y Leyva, 2002), ambas basadas en resolver un problema de optimización multiobjetivo en que las funciones objetivo son medidas de argumentos a favor y en contra del ranking final que se prescribe. La primera propuesta (Leyva y Fernández, 1999), (Leyva, 2000) es más simple, pero utiliza menos información y emplea un enfoque lexicográfico cuando resuelve el conflicto de objetivos, el cual puede no conducir a buenas soluciones de compromiso. En (Fernández y Leyva, 2002) se discute una interpretación nueva del Principio de Independencia respecto de Alternativas Irrelevantes desde una posición más flexible sobre la base de relaciones borrosas de preferencia; se derivan varias propiedades de consistencia de las soluciones que minimizan la cantidad de violaciones de preferencia. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, la propuesta de (Fernández y Leyva, 2002) requiere resolver un problema matemático más complicado, con una fuerte interacción entre los objetivos, y los autores no sugieren un método general para abordarlo.

En este trabajo se propone un nuevo método basado en ideas similares a (Leyva y Fernández, 1999) y (Leyva, 2000), pero mejorando la modelación de preferencias al resolver el problema de optimización multiobjetivo, que ahora se divide en dos etapas y se resuelve sin utilizar un rígido esquema lexicográfico, con un algoritmo evolutivo más simple que en el trabajo que sirve como antecedente. Se logran así soluciones de compromiso de más calidad y de un modo más sencillo. La estructura de la contribución es la siguiente: en la sección 2 se discuten las dos posiciones básicas que se contraponen en el diseño de un agente racional para la selección de alternativas, y se argumenta porqué se prefiere la que se apoya en la lógica borrosa. En la sección 3 se precisa la notación de trabajo y a continuación se discuten las críticas a los trabajos precedentes. Sobre tal fondo se presenta la nueva propuesta, como una mejora del algoritmo de (Leyva y Fernández, 1999) (sección 5), y posteriormente en la sección sexta se presentan algunos experimentos computacionales. Por último se precisan breves conclusiones.

2 Dos Perspectivas para el Diseño de Agentes de Decisión

El enfoque de considerar que la Inteligencia Artificial es el estudio de cómo diseñar agentes racionales ha ganado popularidad en los últimos años. Un agente racional ideal es aquél que en todos los casos de posibles secuencias de percepciones emprende todas aquellas acciones que favorezcan obtener el máximo de su medida de rendimiento, basándose en las evidencias aportadas por la secuencia de percepciones y en todo el conocimiento incorporado en él (Russell y Norvig, 1996). Aunque atractiva para el sentido común, la definición está incompleta en un aspecto importante, la necesidad de caracterizar la medida de rendimiento del agente. La respuesta a esta pregunta hay que buscarla en la teoría de la decisión y en las objeciones que se hacen a varios de sus axiomas. Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ el conjunto de decisión. Se supone que el agente desea obtener un orden total de este conjunto en el sentido de calidad decreciente (ranking), o al menos encontrar cuál es la alternativa preferida. Si el agente conoce una medida de desempeño $v : A \rightarrow \mathfrak{R}$ la solución del problema es trivial. La existencia de esa medida lleva a las condiciones:

- i. $a_k P a_j \Leftrightarrow v(a_k) > v(a_j)$
- ii. $a_k I a_j \Leftrightarrow v(a_k) = v(a_j)$

donde P e I son relaciones binarias de preferencia estricta e indiferencia, respectivamente. O más compactamente, si S denota la relación de preferencia débil “al menos tan buena como”, i e ii se convierten en:

$$a_k S a_j \Leftrightarrow v(a_k) \geq v(a_j)$$

Las propiedades de \geq obligan a que la relación S sea transitiva y completa en $A \times A$ (axioma de comparabilidad transitiva del enfoque normativo de la decisión). La intransitividad e incomparabilidad, frecuentes en la actuación humana, no tienen cabida en este modelo.

La relación S expresa las preferencias de un cierto agente humano (o grupo de agentes humanos), el “Decision Maker” o el actor del proceso de decisión según la idea más flexible propuesta por (Roy, 1996). Esas preferencias son propias del actor, expresan sus creencias, juicios, conocimiento acerca de las consecuencias de las acciones, actitud ante el riesgo, actitud ante el conflicto de atributos contradictorios. No hay modo de definir un agente racional abstracto, divorciado de la subjetividad del actor que representa. Y el agente no puede ser más racional que las preferencias del actor que modela. Hay mucha evidencia experimental que apunta a la inconsistencia de los agentes humanos en la toma de decisiones (Kahneman y Tversky, 2000), y muchos autores han objetado el axioma de comparabilidad transitiva ((Roy, 1990), (Roy y Vanderpooten, 1995)). Como consecuencia se producen efectos de intransitividad e incomparabilidad en la relación de preferencia, que se objetan como irracionales desde posiciones normativas, pero que también pueden entenderse como expresión de una dificultad que está presente en la acción real de la toma de decisiones.

El enfoque normativo de la decisión no deja de ser un paradigma de un proceso ideal, en el que el DM, con la ayuda de otro agente generalmente humano, el analista de la decisión, reflexiona sobre sus creencias y preferencias, determina, modela y quizás reduce la zona de incertidumbre y falta de información, aclara y aumenta la consistencia de sus juicios (French, 1986). Es muy difícil que en la práctica un agente software logre sustituir el trabajo del analista, y conseguir una colaboración con el actor que cumpla plenamente los principios normativos. Es de hecho imposible si las preferencias y creencias del actor están mal definidas (por ejemplo, decisión en grupo), si el actor no es más que un representante del verdadero DM, si el concepto de DM se asocia a un intangible (por ejemplo, la opinión pública, el Estado) o si la información es en esencia imprecisa e incompleta. Renunciar al axioma de comparabilidad transitiva y construir la relación S como un predicado “borroso” es entonces la mejor opción.

Se trata entonces de definir $\sigma : A \times A \rightarrow [0,1]$ de modo que $\sigma(x,y)$ represente el grado de credibilidad de la aserción “la alternativa x es al menos tan buena como y desde el punto de vista del actor del proceso de decisión”. Se han propuesto diferentes métodos para construir σ . Para la decisión multicriterio en condiciones de certeza los más populares son ELECTRE III (Roy, 1990), PROMETHEE (Brans y Vincke, 1985) y ELECTRE TRI (Zopounidis y Dimitras, 1998) (para problemas de clasificación). El mejor tratamiento probabilista está en los trabajos (Martel y D’Avignon, 1982), (Siskos, 1983) y (D’Avignon y Vincke, 1988). Para la decisión en grupo se han aplicado ELECTRE III (Rogers, Bruen y Maistre, 2000), (Hokkanen y Salminen, 1997), (Leyva y Fernández, 2003) y PROMETHEE (Macharis, Brans, y Mareschal, 1998).

La fase de construcción termina cuando queda definida la función σ . La fase de explotación busca llegar a una prescripción utilizando la información contenida en σ .

Estos métodos son flexibles, requieren relativamente poco esfuerzo del actor, y ofrecen un ambiente más adecuado para analizar problemas de decisión en condiciones de falta de información, fuentes de imprecisión y preferencias mal definidas. Las críticas principales que se les hacen son: 1) falta de una base axiomática que los sustente; 2) requieren valores de muchos parámetros, la mayor parte poco significativos para el actor, lo que puede producir en este un sentimiento de insatisfacción al verse obligado a suministrar una información que le es ajena, y 3) resultados poco consistentes de la fase de explotación, dificultad para manejar ciclos e intransitividad, y llegar a un ranking bien argumentado.

El punto 1) no es tan significativo como parece a primera vista. Cualquier heurística que lleve a σ es aceptable siempre que se justifique su interpretación como grado de credibilidad de xSy . La objeción 2) es frecuentemente seria, pero puede subsanarse aplicando procedimientos que permiten obtener los parámetros a partir de un conjunto de ejemplos en que el actor ha establecido $a_i S a_j$, y $a_k nS a_m$ (Mousseau, 1995), (Mousseau y Díaz, 2004). Por tanto, donde son necesarios avances fundamentales es en la teoría y la práctica de los métodos de explotación. Las técnicas más populares son ordenar según el indicador del flujo neto (Fodor y Roubens, 1994) y el proceso de “destilación” que se implementa en ELECTRE III. Los trabajos de (Fernández y Leyva, 2002) y (Leyva y Fernández, 1999) introdujeron mejoras en el tratamiento de los ciclos, intransitividad, y dan soluciones más consistentes y robustas respecto de alternativas irrelevantes. No obstante, en la próxima sección se discuten sus insuficiencias. El resto de la presente contribución se dedica a una nueva propuesta con mejores propiedades.

Por último, conviene adecuar la definición de (Russell y Norvig, 1996): Un agente inteligente es aquél que en todos los casos de posibles secuencias de percepciones emprende todas aquellas acciones que favorezcan satisfacer sus objetivos del mejor modo posible, de acuerdo con un modelo global de las preferencias, creencias y prioridades que logró obtener del decisor humano que representa, basándose en las evidencias aportadas por la secuencia de percepciones y en todo el conocimiento incorporado en él mismo. Nótese que esta definición se aparta ligeramente del paradigma de “actuar racionalmente”, haciendo concesiones a “actuar como humano” y “pensar como humano”, enfoques alternativos de la Inteligencia Artificial.

3 Notación Básica

Precisemos algunas ideas básicas. Sea A un conjunto finito de alternativas, objeto del proceso de toma de decisiones, y $N = \text{card}(A)$. Supongamos que queremos resolver el problema γ (el problema de ordenamiento) siguiendo la propuesta de clasificación de Roy (e.g. (Roy y Vanderpooten, 1995)).

Sea σ una relación borrosa de preferencia definida en $A \times A$ con imagen en $[0,1]$. $\sigma(x,y)$ se puede interpretar como el grado de credibilidad del predicado “ x es al menos tan buena como y ”. Sea λ un número real en $[0,1]$ tal que si $\sigma(x,y) \geq \lambda$, decimos que x sobreclasifica a y con credibilidad λ , denotado por $xS^\lambda y$. De otra forma, la sobreclasificación se rechaza ($xnS^\lambda y$).

Se supone la existencia de un umbral $\beta > 0$ tal que si $xS^\lambda y$ y también $\sigma(y,x) \leq (\lambda - \beta)$, entonces hay una relación asimétrica de preferencia que favorece a x la cual denotamos como $xP^{\lambda, \beta} y$. Es natural admitir que para algunos valores λ y β , las condiciones que definen $P^{\lambda, \beta}$ son buenos argumentos para justificar una relación de preferencia estricta en el sentido que lo propone (Roy, 1996).

Sea R_σ un orden débil de A , que corresponde a un posible ranking de este conjunto. R_σ define cierto orden de A que denotamos por R_A . Si $(a,b) \in R_\sigma$ y $(b,a) \notin R_\sigma$ decimos que a está posicionada (prescrita) más alto que b en R_A . Si $(a,b) \in R_\sigma$ y $(b,a) \in R_\sigma$, a y b comparten la misma posición en R_A . Es un orden en el sentido de la calidad decreciente. La primera posición en R_A se le propone al DM como la mejor alternativa en A , y así sucesivamente. Equivalentemente, R_σ o R_A se pueden considerar como una prescripción para este tipo de problemas de decisión.

La parte asimétrica de R_σ la denotaremos por O , o sea

$$\forall (a,b) \in A \times A, aOb \Leftrightarrow (a,b) \in R_\sigma \text{ and } (b,a) \notin R_\sigma$$

4 Breve Revisión de Soluciones Previas Basadas en Optimización Multiobjetivo

4.1 Algunos conceptos principales de optimización multiobjetivo

Un problema de optimización multicriterio o multiobjetivo es el interés de minimizar una función $f(\mathbf{z})$ sujeta a $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ donde $f = (f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}), \dots, f_k(\mathbf{z}))$ con $k \geq 2$ funciones objetivo reales dependientes de las variables de decisión denotadas por \mathbf{z} . Las variables de decisión pertenecen al conjunto factible no vacío $\mathbf{Z} \subset \mathbf{U}$, con \mathbf{U} el conjunto donde están definidas las variables de decisión. Usualmente, \mathbf{z} es un vector de \mathfrak{R}^N , pero no necesariamente (como en la propuesta descrita en el presente trabajo). La palabra “minimizar” se refiere al intento de minimización de todas las funciones objetivo simultáneamente. En casos no triviales, no existe una sola solución que sea óptima con respecto a todas las funciones objetivo. Esto significa que las funciones objetivo son al menos parcialmente conflictivas.

En lo que sigue denotamos la imagen de la región factible por $\mathbf{I} (=f(\mathbf{Z}))$; se conoce como el conjunto de objetivos factibles, subconjunto del espacio de objetivos \mathfrak{R}^K .

Definición:

Un punto de decisión $\mathbf{z}^* \in \mathbf{Z}$ es óptimo de Pareto si no existe otro punto de decisión $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ tal que $f_i(\mathbf{z}) \leq f_i(\mathbf{z}^*)$ para toda $i=1, \dots, k$ y $f_j(\mathbf{z}) < f_j(\mathbf{z}^*)$ para al menos un índice j . Un vector objetivo $\mathbf{v}^* \in \mathbf{I}$ es óptimo de Pareto si no existe otro vector objetivo $\mathbf{v} \in \mathbf{I}$ tal que $v_i \leq v_i^*$ para toda $i=1, \dots, k$ y $v_j < v_j^*$ para al menos un índice j ; ó equivalentemente, \mathbf{v}^* es óptimo de Pareto si es imagen de un punto de decisión óptimo de Pareto. Así una solución óptima de Pareto es el par $(\mathbf{z}^*, f(\mathbf{z}^*))$.

Si en los conceptos anteriores “minimizar” se reemplaza por “optimizar”, “ \leq ” por “al menos tan bueno como” y “ $<$ ” por “preferido a”, obtenemos una descripción más general. Esto permite ampliar nuestra discusión al caso en que algunas funciones objetivo deban ser maximizadas.

Definición:

Se dice que $(\mathbf{z}^1, f(\mathbf{z}^1))$ domina a $(\mathbf{z}^2, f(\mathbf{z}^2))$ si $f_i(\mathbf{z}^1) \leq f_i(\mathbf{z}^2)$ para toda $i=1, \dots, k$ y $f_j(\mathbf{z}^1) < f_j(\mathbf{z}^2)$ para al menos un índice j

Obviamente no existe ninguna solución que domine a una solución óptima de Pareto.

Definición:

La solución óptima (ideal) es un vector objetivo $\mathbf{f} = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*)$ en el que $f_i^* = \text{Óptimo de } f_i(\mathbf{z}), i=1, \dots, k, \mathbf{z} \in \mathbf{S}$

Salvo en situaciones triviales, la solución ideal no se puede alcanzar. Entonces, al resolver un problema de optimización multiobjetivo se busca “la mejor solución de compromiso”, que resuelva de la mejor forma posible el conflicto de los criterios, de acuerdo con el modelo global de preferencias del DM. Se puede demostrar que el mejor compromiso es necesariamente una solución óptima de Pareto, lo cual confiere una significación especial al conjunto de ellas.

4.2 Presentación y Crítica de los Métodos Anteriores

Consideremos las siguientes definiciones:

El conjunto de discrepancias (violaciones) con la relación de preferencia estricta:

$V = \{(x, y) \in A \times A \text{ tal que } x P^{\lambda, \beta} y \wedge y R_{\sigma} x\}$; $\text{card}(V)$ se denota por n_v

El conjunto de discrepancias con S^λ :

$D = \{(x, y) \in A \times A \text{ tal que } x O y \wedge x N S^\lambda y\}$. Denotemos $n_d = \text{card}(D)$.

El conjunto de concordancias se define como:

$C = \{(x, y) \in A \times A, x \neq y, \text{ tal que } x S^\lambda y \wedge x R_{\sigma} y\}$; $\text{card}(C)$ se denota por n_c .

El conjunto de acciones incomparables es:

$I = \{(x, y) \in A \times A, \text{ tal que } x N S^\lambda y \wedge y N S^\lambda x\}$; $\text{card}(I)$ se denota por n_i .

Nótese que n_v es una función de R_σ , λ , y β ; n_d depende de λ y de la parte asimétrica de R_σ ; n_c es una función de R_σ y λ . ; n_l es una función de λ . Si se fija R_σ , n_v y n_c son funciones decrecientes de λ , y n_d y n_l son monótonas crecientes con respecto a λ . Es claro que $\text{Max } n_l = N.(N-1)/2$

En (Leyva y Fernández, 1999) la prescripción se obtiene como la mejor solución de compromiso al problema

$$\begin{aligned} & \text{Min } (n_v, n_l), \text{ Max } \lambda \quad \dots\dots\dots (1) \\ & R_s, \lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

(R_s denota un orden total estricto de A considerado como variable en este problema de optimización)

(1) es un problema de optimización multiobjetivo combinatorio en el que las variables de decisión son rankings y números reales. Su dificultad se incrementa exponencialmente con N. En (Leyva y Fernández, 1999) se propuso un algoritmo evolutivo (AE) que usa prioridad lexicográfica para n_v . Estos algoritmos son particularmente deseables para resolver problemas de optimización multiobjetivo porque procesan simultáneamente un conjunto de soluciones posibles en su población de trabajo, lo que permite obtener un conjunto de soluciones óptimas de Pareto con la ejecución de un solo algoritmo; no son necesarias corridas por separado como cuando se emplean las técnicas tradicionales de la programación matemática. Los AEs son menos sensibles a la forma ó continuidad de la región factible, características que son esenciales para las técnicas de la programación matemática (Coello, 1999). Además, en el caso del problema (1), un AE ayuda a manejar su complejidad de orden exponencial, pues la eficiencia de cómputo de éstos métodos es menos sensible al tamaño del problema en comparación a las técnicas tradicionales (Michalewicz, 1996).

En (Fernández y Leyva, 2002), los autores proponen que el ranking final (la prescripción) debería ser la mejor solución de compromiso del problema

$$\begin{aligned} & \text{Min } (n_v, n_d), \text{ Max } (n_c, \lambda) \quad \dots\dots\dots (2) \\ & R_\sigma, \lambda \quad \text{with } R_\sigma \subset A \times A, \lambda \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

El problema (2) contiene más información que (1) sobre σ , pero es más complicado. Algunos usuarios pueden argumentar que esta propuesta convierte el problema de decisión original en un problema multicriterio que no es obviamente más simple que el anterior. Para simplificar (Fernández y Leyva, 2002) sugieren transformar (2) en

$$\begin{aligned} & \text{Min } (n_v, w n_d - n_c), \text{ Max } \lambda \\ & R_s, \lambda \quad \text{with } \lambda \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (3)$$

(donde w es un factor de ponderación), y resolverlo con el uso del algoritmo evolutivo propuesto por (Leyva y Fernández, 1999) y (Leyva, 2000), manteniendo la prioridad lexicográfica de n_v .

Estamos de acuerdo en considerar n_v como el principal objetivo en los problemas 1-3 (ver (Fernández y Leyva, 2002) para una discusión profunda y algunas propiedades interesantes de las soluciones con mínimo n_v). Sin embargo, el enfoque lexicográfico puede fallar cuando $P^{\lambda,\beta}$ tiene ciclos para valores altos de λ debido a la estrecha conexión existente entre ciclos y violaciones tal como se estableció en (Fernández y Leyva, 2002); la existencia de ciclos en $P^{\lambda,\beta}$ implica violaciones inevitables, esto es $\text{Min } n_v \neq 0$ para $\lambda = \lambda^*$.

$$R_\sigma$$

Obtener una buena solución de compromiso para los problemas 2-3 no es tarea fácil por otra importante aunque menos evidente razón: la significación, el impacto para el DM, de los objetivos n_v , n_d y n_c es relativo al nivel de credibilidad λ ; n_v y n_c se hacen más importantes conforme λ se incrementa; por el contrario, la importancia de n_d se degrada cuando λ se toma valores altos. En el caso extremo, cuando $\lambda \approx 1$ el DM puede perder su interés en reducir n_d ; para aclarar esta idea, por ejemplo supongamos que $\sigma(a,b) = 0.9$, $\sigma(b,a) = 0.6$ y $\lambda = 0.95$; por tanto $a \succ^{\lambda} b$. Si la alternativa a es prescrita por encima de b en el ordenamiento (aOb), el par (a,b) pertenece al conjunto D, pero es una discrepancia sólo en apariencia, que carece de importancia para el DM, pues se pueden encontrar en $\sigma(a,b)$ y $\sigma(b,a)$ buenos argumentos a favor de aOb.

5 Un Nuevo Método para Explotar la Relación de Preferencia Borrosa

Se propone aquí un método mejorado para resolver el problema (1) La idea principal es considerar separadamente los siguientes dos subproblemas:

$$\text{Max } \lambda, \text{ Min } n_I \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Min } n_v (R_s, \lambda^*) \dots\dots\dots (5)$$

$$R_s$$

donde λ^* corresponde al mejor compromiso del problema (4). Un ajuste interactivo de λ^* es posible si $n_{vmin} = \text{Min } n_v (\lambda^*)$ es diferente de cero.

$$R_s$$

El hecho de que la minimización de n_v sea después del cálculo de λ^* no se contradice con nuestra percepción de la importancia del primero pues para R_s fijo el incremento de λ mejora n_v .

Consideremos primero el subproblema (4).

$\forall (x,y) \in AxA, x \neq y$, sean

$$\alpha(x,y) = \max(\sigma(x,y), \sigma(y,x))$$

$$v(x,y) = \min(\sigma(x,y), \sigma(y,x))$$

Es fácil ver que que $\alpha(x,y) = \alpha(y,x)$; $v(x,y) = v(y,x)$, de modo que se tienen a lo más $M=N.(N-1)/2$ diferentes $\alpha(x,y)$ y $v(x,y)$ en AxA .

Sean $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_M$ los valores de $\alpha(x,y)$ con $\alpha_1 = \alpha_{min} = \min(\alpha(x,y))$ en AxA , y $\alpha_M = \alpha_{max} = \max(\alpha(x,y))$ en AxA . Se observa lo siguiente:

Si $\lambda \leq v(x,y) \leq \alpha(x,y)$, se tiene $xS^\lambda y, yS^\lambda x$ de modo que $(x,y) \in I$ (6.a)

Si $v(x,y) < \lambda \leq \alpha(x,y)$, se tiene $(xS^\lambda y \text{ y } yNS^\lambda x)$ o $(yS^\lambda x \text{ y } xNS^\lambda y)$, de modo que $(x,y) \notin I$ (6.b)

Si $v(x,y) \leq \alpha(x,y) < \lambda$ se tiene $xNS^\lambda y, yNS^\lambda x$ de modo que $(x,y) \in I$ (6.c)

De lo anterior siguen las siguientes propiedades:

- a. En el intervalo $[0, \alpha_1]$ $n_I(\lambda) = 0$ por 6.a y 6.b.
- b. Si $\alpha_M < 1$, en el intervalo semi-abierto $(\alpha_M, 1]$ $n_I(\lambda) = N.(N-1)/2$ por 6.c.
- c. Sean λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 < \lambda_2$; si un par (x,y) pertenece a I cuando $\lambda = \lambda_1$, permanece en I cuando $\lambda = \lambda_2$. Por tanto $n_I(\lambda_1) \leq n_I(\lambda_2)$. $n_I(\lambda)$ es una función monótona creciente en el intervalo $[0,1]$.
- d. De acuerdo con 6.b y 6.c $n_I(\lambda)$ no es continua para $\alpha_k < 1$, pues $\lim_{\lambda \rightarrow \alpha_k, \lambda > \alpha_k} n_I(\lambda) > n_I(\alpha_k)$.
- e. Por 6.a, 6.b y 6.c, $n_I(\lambda)$ es constante en los intervalos semi-abiertos $(\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $k=1, \dots, M$.
- f. De las propiedades d y e $n_I(\lambda)$ es una función escalonada, constante por tramos en $[0,1]$.

Estas propiedades permiten proponer un método muy simple para resolver el problema (4) basado en el siguiente resultado:

Teorema

Con la notación previa, el conjunto de vectores objetivo $(n_I(\alpha_k), \alpha_k)$, $k=1, \dots, M$, es el conjunto completo de las soluciones óptimas de Pareto del subproblema (4).

Demostración:

Si $\lambda > \alpha_k$, $n_I(\lambda) > n_I(\alpha_k)$ de acuerdo con las propiedades c y d

Si $n_I(\lambda) < n_I(\alpha_k)$, $\lambda < \alpha_k$ por la propiedad c

Esto demuestra que un vector objetivo $(n_I(\alpha_k), \alpha_k)$ es óptimo de Pareto de (4), puesto que cuando un objetivo mejora, necesariamente el otro se degrada.

Ahora probaremos que $\lambda' \neq \alpha_k$ no es un punto de decisión óptimo de Pareto del subproblema (4).

Se presentan tres situaciones posibles:

- i. Si $\lambda' \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$, por la propiedad e $n_I(\lambda') = n_I(\alpha_{k+1})$; por tanto $(n_I(\lambda'), \lambda')$ está dominado por $(n_I(\alpha_{k+1}), \alpha_{k+1})$.
- ii. Si $\lambda' \in (0, \alpha_1)$ por la propiedad a, $n_I(\lambda') = n_I(\alpha_1) = 0$; de modo que $(n_I(\lambda'), \lambda')$ está dominado por $(n_I(\alpha_1), \alpha_1)$
- iii. $\lambda' \in (\alpha_M, 1)$ por la propiedad b $n_I(\lambda') = n_I(\lambda=1) = N.(N-1)/2$; entonces $(n_I(\lambda'), \lambda')$ está dominado por $(n_I(\lambda=1), 1)$.

Por lo tanto $(n_I(\lambda'), \lambda')$ está dominado si $\lambda' \neq \alpha_k$. La demostración termina. La mejor solución de compromiso del problema (4) es algún punto $(n_I(\alpha_k), \alpha_k)$.

Como consecuencia de este teorema, concluimos que la cardinalidad del conjunto de Pareto es a lo más $N.(N-1)/2$; entonces, se puede fácilmente realizar una exploración de él para encontrar un buen compromiso entre n_I y λ . Esta solución de compromiso denotada por λ^* se usa para minimizar n_v . Si $n_{vmin}(\lambda^*)$ no es satisfactoria, el DM puede incrementar interactivamente λ para mejorar n_v , cuidando mantener un mínimo aceptable de $card(S(\lambda))$ (controlando n_I). El procedimiento es el siguiente:

1. Obtener $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$
2. Inicializar ISOLN = 1
3. Repetir desde $j = \text{ISOLN}$ hasta $j=M$ ó hasta que n_I^* sea demasiado alto como para ser incrementado.
 - 3.a Asignar $\lambda^* = \alpha_j$ y $n_I^* = n_I(\alpha_j)$
 - 3.b Comparar n_I^* con $n_I(\alpha_{j+1})$. Si n_I^* alcanza un valor que parece (en el estado de conocimiento actual de su conflicto con n_v) muy alto como para ser incrementado, asignar ISOLN = j y detener el ciclo
4. Resolver el problema de Minimizar $n_v(\lambda^*, R)$. (R es un orden estricto, aquí considerado como variable; λ^* es una constante que se obtiene del paso 3). Obtener $n_{vmin}(\lambda^*)$
5. Si $n_{vmin}(\lambda^*) \neq 0$, y $n_I(\alpha_{\text{ISOLN}})$ admite un incremento adicional (en el nuevo estado de conocimiento de su conflicto con n_v), regresar al paso 3.

Para minimizar $n_v(\lambda^*, R)$ se puede utilizar un algoritmo evolutivo que en parte es similar al propuesto por (Leyva y Fernández, 1999), pero claramente más simple porque ahora sólo se optimiza un criterio (n_v). Siguiendo a (Leyva y Fernández, 1999) recordemos algunas características básicas de su trabajo y sobre esa base explicamos brevemente la propuesta presente:

Una solución potencial para un problema de ordenamiento se representa de manera ordinal. En general, una solución potencial es un ranking del conjunto de alternativas en orden decreciente de preferencia. En tal representación, cada alternativa (gen) se codifica en forma N-aria, y su unión da un cromosoma ó cadena N-aria. Una alternativa que se codifica como a_{k_i} en la i-ésima posición de la cadena quiere decir que está prescrita en el i-ésimo lugar del orden; a_{k_i} se prescribe (se "rankea") antes que a_{k_j} sí $i < j$, donde $a_{k_i} \in A$, $i=1, 2, \dots, N$, y $[k_1, k_2, \dots, k_N]$ es una permutación de $[1, 2, \dots, N]$.

En la figura 1 se ilustra una representación esquemática de un cromosoma (solución) para un problema de ranking.

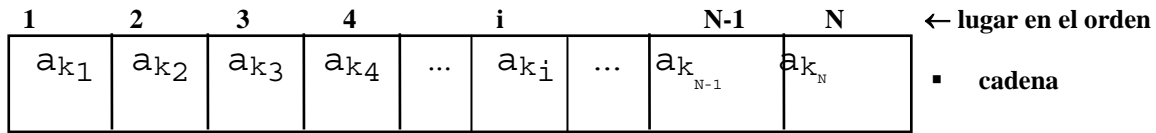


Fig. 1. Representación esquemática de un cromosoma

Otro elemento importante es la función de aptitud f . La aptitud mide “qué tan bueno” es un individuo con respecto a la solución del problema de ordenamiento y se usa durante las fases de selección y reemplazo. Aquí tomamos $f = n_v$.

La selección de padres es la tarea de asignar oportunidades de reproducción a cada individuo en la población basado en su aptitud relativa. Aquí usamos un método de selección por torneo k -ario, en el que k individuos de la población se eligen aleatoriamente y el individuo más apto se toma para la reproducción. Para producir un hijo, se llevan a cabo dos torneos produciéndose en cada uno una cadena padre. Estas dos cadenas padre se combinan para producir un hijo.

Por cada padre, el operador de cruzamiento toma genes y los combina para crear una cadena hijo. Al trabajar con codificación por permutaciones, es necesario crear un operador de cruzamiento el cual debería ser específico para esta forma de codificación. Siguiendo las ideas de (Leyva y Fernández, 1999) se utiliza el operador de cruzamiento UX2 introducido primeramente por (Poon y Carter, 1995).

Se aplica el operador de mutación a la cadena hija generada por el cruzamiento. El método es intercambiar un par de genes elegidos aleatoriamente en un individuo.

El esquema de reemplazo en la población es muy simple. Una vez que un hijo se ha generado reemplazará al miembro menos apto de la población (al individuo con n_v máxima en la población actual).

Resumen del algoritmo evolutivo para el subproblema 5:

- 1) Generar una población inicial de N soluciones aleatorias. Hacer el contador de iteraciones $t=0$.
- 2) Seleccionar dos individuos P_i y P_j de la población utilizando torneos k -arios
- 3) Combinar P_i y P_j para formar una nueva solución C utilizando el operador de cruzamiento UX2
- 4) Mutar dos genes in C seleccionados al azar
- 5) Incrementar $t = t + 1$
- 6) Reemplazar por C al individuo menos apto en la población
- 7) Repetir los pasos 2-6 hasta que se hayan generado $t = K$ soluciones, donde K es el número de generaciones.

La codificación como cadena lleva a que las soluciones sean órdenes estrictos. Para obtener un orden débil permitiendo empates será necesario realizar muchas corridas, con diferentes secuencias de números aleatorios, de modo de obtener una distribución de soluciones óptimas dentro del conjunto de órdenes estrictos. Una distribución estadística de esos órdenes nos da la información necesaria para decidir las posiciones en el ranking final. Esta idea se aclarará en algunos ejemplos.

6 Algunos Experimentos Computacionales

Esta propuesta se programó en Builder C++ y se corrió en una PC Pentium IV, 1.5 GHz. El código del programa se dividió en dos módulos, uno para cada subproblema. En todos los ejemplos el algoritmo evolutivo se ejecutó 100 veces (cada una con una semilla aleatoria diferente) El tamaño de la población fue de 50 individuos. La probabilidad de cruzamiento fue de 0.8 y la probabilidad de mutación de 0.5.

Ejemplo1. La relación borrosa de preferencia viene dada por la siguiente matriz de credibilidad de 10×10 entre las acciones **A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9** (Tabla 1).

| | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 |
|----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A0 | 1.0 | 0.6 | 0.3 | 0.5 | 0.2 | 0.7 | 0.9 | 0.3 | 0.7 | 0.8 |
| A1 | 0.2 | 1.0 | 0.4 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.6 | 0.3 |
| A2 | 0.7 | 0.9 | 1.0 | 0.6 | 0.4 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.7 | 0.7 |
| A3 | 0.6 | 0.8 | 0.3 | 1.0 | 0.4 | 0.7 | 0.8 | 0.4 | 0.3 | 0.8 |
| A4 | 0.6 | 0.8 | 0.7 | 0.9 | 1.0 | 0.7 | 0.8 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
| A5 | 0.4 | 0.65 | 0.4 | 0.4 | 0.2 | 1.0 | 0.4 | 0.3 | 0.5 | 0.5 |
| A6 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.5 | 0.6 | 1.0 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |
| A7 | 0.6 | 0.8 | 0.3 | 0.8 | 0.2 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 0.8 | 0.7 |
| A8 | 0.4 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.4 | 0.3 | 0.9 | 0.3 | 1.0 | 0.5 |
| A9 | 0.5 | 0.8 | 0.3 | 0.6 | 0.3 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.7 | 1.0 |

Tabla 1. Matriz de credibilidad entre las acciones A0, ..., A9

La tabla 1 se procesó con la propuesta de la sección 5. Al resolver el problema 4 consideramos dos soluciones diferentes (n_i^*, λ^*) (paso 3.b): $(13, 0.65)$ y $(14, 0.7)$. Se escogió la primera. Por ende se resolvió el subproblema 5 con $\lambda = 0.65$.

Usando el algoritmo evolutivo de la sección 4 con $\beta = 0.10$, se obtuvieron muchas soluciones diferentes (rankings estrictos) satisfaciendo $n_v = 0$. El número de veces que se encuentra una alternativa en cierta posición en el ranking está dado en la Tabla 2 con respecto a 100 variaciones de la semilla. El tiempo de ejecución fue de 120 segundos (para 100 corridas).

| | A4 | A2 | A7 | A0 | A3 | A9 | A5 | A8 | A6 | A1 |
|----|-----|-----|-----|----|----|-----|----|----|----|----|
| 1 | 153 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 153 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 101 | 52 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 52 | 43 | 58 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 58 | 95 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 104 | 49 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 49 | 51 | 53 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 32 | 67 | 21 | 33 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21 | 33 | 51 | 48 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 81 | 72 |

Tabla 2. Resultados del nuevo método en diferentes corridas

(Por ejemplo, el número 153 en el primer renglón, correspondiente a la columna A_4 , significa que esta alternativa ocupó la posición más alta en los 153 individuos óptimos generados durante las 100 corridas, cada una con diferente semilla).

Estos resultados sugieren un ordenamiento final $A_4 > A_2 > A_7 > A_0 > A_3 > A_9 > A_5 > A_8 > (A_1 \sim A_6)$. Corriendo con $\lambda = 0.7$ obtuvimos $A_4 > A_2 > A_7 > A_0 > A_3 > A_9 > (A_5 \sim A_8) > A_1 > A_6$ (tiempo de ejecución = 48 segundos).

Este ejemplo se discutió en (Leyva y Fernández, 1999). El ranking final sugerido fue $A_4 > A_2 > A_7 > A_0 > A_3 > A_9 > A_8 > A_5 > A_1 > A_6$, aunque sin una clara preferencia entre A_5 y A_1 .

El proceso de “destilación” de ELECTRE-III sugiere la siguiente prescripción:

$A_4 > (A_2, A_7) > A_0 > A_3 > (A_9, A_8) > A_5 > A_1 > A_6$

Es difícil aceptar el hecho de que A_2 y A_7 sean puestas en la misma posición. Hay fuertes argumentos a favor de preferir la primera alternativa. Es claro que A_2 sobreclasifica a A_7 y lo contrario es falso, lo que indica una preferencia estricta a favor de A_2 (con un nivel de credibilidad de 0.9). El valor del flujo neto asociado con A_2 es mayor. También, si consideramos el conjunto $A - \{A_4\}$, A_2 es la mejor alternativa en el sentido de (Orlovski, 1978), pues se cumple que $\sigma(A_2, A_i) \geq \sigma(A_i, A_2) + 0.20 \forall i \neq 2, 4$.

Ejemplo 2. En este problema, la relación borrosa de preferencia está dada en la Tabla 3.

| | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | A ₀ | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ |
| A ₀ | 1 | 0.73 | 0.65 | 0.65 | 0.65 |
| A ₁ | 0.50 | 1 | 0.70 | 0.67 | 0.66 |
| A ₂ | 0.50 | 0.50 | 1 | 0.63 | 0.63 |
| A ₃ | 0.50 | 0.35 | 0.35 | 1 | 0.70 |
| A ₄ | 0.53 | 0.30 | 0.30 | 0.70 | 1 |

Tabla 3. Matriz de credibilidad entre las acciones A0, ..., A4

La elección de A₀ como la mejor acción se argumenta sólidamente por:

Primero, consideremos el subconjunto A^{BND} compuesto por las alternativas “borrosamente no dominadas” (cf. (Orlovski, 1978), (Fodor and Roubens, 1994)):

$$A^{BND} = \{ A_i \in A : \sigma(A_i, A_j) \geq \sigma(A_j, A_i) \quad \forall A_j \in A \}$$

En este caso A^{BND} es no vacío; A₀ ∈ A^{BND} y las otras alternativas no son elementos de él. Además, $\sigma(A_0, A_j) \geq \sigma(A_j, A_0) + 0.12, \forall A_j, j \neq 0$.

Segundo, si se considera el conjunto reducido $A' = A - \{A_0\}$, entonces $A'^{BND} = \{A_1\}$ es claramente la mejor alternativa en el subconjunto. Sin embargo, notemos también que en la comparación por parejas entre A₀ y A₁, sí $\lambda=0.7$ y $\beta=0.1$ se toman como consenso y nivel de umbral, razonablemente se puede aceptar que “A₀ sobreclasifica A₁ pero A₁ no sobreclasifica A₀”, dando cierta preferencia a favor de A₀.

Siguiendo nuestra propuesta para resolver el subproblema 4 consideramos dos posibilidades (n_1^*, λ^*) (paso 3.b en la Sección 4): (0, 0.63) y (2, 0.65). Preferimos la primera.

Con el uso del algoritmo de la Sección 5 con $\beta=0.1$, se obtuvieron solamente dos soluciones diferentes (rankings estrictos) cumpliendo $n_v = 0$; $A_0 > A_1 > A_2 > A_3 > A_4$ y $A_0 > A_1 > A_2 > A_4 > A_3$. El número de veces que una alternativa aparece en cierta posición se da en la Tabla 4 con respecto a 100 variaciones de la semilla. Sugiere sin duda el ordenamiento $A_0 > A_1 > A_2 > (A_3, A_4)$. La posición relativa entre A₀ y A₁ aquí se determina por $A_0 P^{\lambda\beta} A_1$ y la ausencia de ciclos en $P^{\lambda\beta}$. Es el mismo resultado reportado por (Leyva y Fernández, 1999). El tiempo de ejecución fue de 45 segundos para 100 corridas.

| | | | | | |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | A ₀ | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ |
| 1 | 200 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 200 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 200 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 |

Tabla 4. Resultados del problema de prueba

En la tabla 5 se muestran los resultados de usar el valor de flujo neto para ordenar el conjunto.

| Alternativa | Flujo neto |
|----------------|------------|
| A ₀ | +0.65 |
| A ₁ | +0.65 |
| A ₂ | +0.26 |
| A ₃ | -0.75 |
| A ₄ | -0.81 |

Tabla 5. Resultados del cálculo del flujo neto

Los valores de la tabla sugieren la clasificación $(A_0, A_1) > A_2 > A_3 > A_4$, lo que es difícil de aceptar por los argumentos anteriores que favorecen a A_0 .

La Tabla 3 se procesó con el método de “destilación” de ELECTRE-III. El ordenamiento final fue $A_1 > A_0 > A_2 > (A_3, A_4)$. En esta prescripción, con $\lambda = 0.7$ se puede ver una clara violación de lo sugerido por el modelo global de preferencias (una violación, $n_v=1$). Obviamente, aunque A_2, A_3, A_4 , son alternativas irrelevantes, juegan un papel importante en el orden relativo de A_0 y A_1 . En el presente ejemplo, este efecto es incluso más objetable porque las primeras son débilmente sobreclasificadas por A_0 .

Ejemplo 3. Considérese la relación borrosa de preferencia que se muestra en la Tabla 6.

| | A ₀ | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A ₀ | 1 | 0.90 | 0 | 0.70 | 0.50 |
| A ₁ | 0.10 | 1 | 0.90 | 0.70 | 0.50 |
| A ₂ | 0.90 | 0.50 | 1 | 0.89 | 0.45 |
| A ₃ | 0.40 | 0.35 | 0 | 1 | 0.50 |
| A ₄ | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 1 |

Tabla 6. Relación borrosa de preferencia del Ejemplo 3

Hay argumentos para elegir A_4 como la mejor alternativa. Nótese que $A_4 P^{\lambda\beta} A_i, i=0,1,2,3$ con $\lambda=0.75$ y $\beta=0.25$. A_4 es la mejor alternativa en el sentido de Orlovski, porque A^{BND} no es vacío; $A_4 \in A^{\text{BND}}$ y las otras alternativas no están contenidas en él.

Cuando se usa el valor de flujo neto para el ordenamiento, los resultados se muestran en la tabla 7.

| Alternativa | Flujo neto |
|----------------|------------|
| A ₀ | -0.05 |
| A ₁ | -0.30 |
| A ₂ | +1.09 |
| A ₃ | -1.79 |
| A ₄ | +1.05 |

Tabla 7. Cálculo del flujo neto

Estos valores sugieren ordenar A_2 antes que A_4 , lo que es inaceptable tomando en cuenta los argumentos anteriores favoreciendo a la última.

La propuesta de (Leyva y Fernández, 1999) sugiere el ranking $A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$ con $\lambda = 0.91$, $n_v = 0$, $n_l = 10$. Todos los pares (A_i, A_j) son incomparables con tal valor de λ , así $\text{card}(S) = \emptyset$; $\lambda = 0.91$ es un valor tan alto que toda la información del grafo de S^λ desaparece. Este resultado claramente cuestionable es una consecuencia de la prioridad lexicográfica para n_v .

Empleando nuestra propuesta se consideran dos posibilidades (n_l^*, λ^*) (paso 3.b en la Sección 4): $(0, 0.7)$ y $(2, 0.75)$. Elegimos la primera.

Ejecutando el algoritmo evolutivo de la sección 5 con $\lambda=0.7$ y $\beta=0.1$ encontramos una violación inevitable (un ciclo de la relación de preferencia estricta (Fernández y Leyva, 2002)), y por tanto $n_{vmin}=1$. En la Tabla 8 resumimos el número de veces que una alternativa se encuentra en cierto lugar en el ranking con respecto a 100 variaciones de la semilla. El tiempo de ejecución fue de 55 segundos. Estos resultados sugieren el ordenamiento $A_4 > (A_0 \sim A_1 \sim A_2) > A_3$. La selección de A_4 como la mejor alternativa está determinada por $A_4 P^{\lambda\beta} A_i$, $i = 0,1,2,3$. Para evitar el ciclo se necesitaría incrementar λ hasta 0.91, y de ahí que se obtenga el resultado inaceptable que arroja el enfoque de (Leyva y Fernández, 1999). Ese es el peligro de la prioridad lexicográfica. La presente propuesta permite mejor control sobre la densidad del grafo de S^λ y llegar a mejores soluciones de compromiso.

| | A_4 | A_0 | A_1 | A_2 | A_3 |
|---|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 300 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 100 | 100 | 100 | 0 |
| 3 | 0 | 100 | 100 | 100 | 0 |
| 4 | 0 | 100 | 100 | 100 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 300 |

Tabla 8. Resultados del problema de prueba

7 Conclusiones

Los métodos de decisión basados en relaciones de preferencia borrosas ofrecen entornos más flexibles para que un agente software, que debe resolver problemas complejos de selección de alternativas, (decisión multicriterio, en grupo y/o en condiciones de incertidumbre), pueda modelar las preferencias, creencias e información de los actores humanos que representa. La prescripción que deriva de la fase de explotación es su lado más débil. La propuesta que aquí se presenta para llegar a la prescripción final, basada en la solución de un problema de optimización multiobjetivo, tiene excelentes propiedades. Al dividir el problema de optimización en dos sub-problemas más simples, se logra caracterizar el conjunto de soluciones de Pareto, y una mejor modelación de preferencias cuando se resuelve el conflicto entre credibilidad y densidad del grafo de la relación de preferencia no borrosa, (primer sub-problema), y después cuando se busca el compromiso necesario con la cantidad de ciclos inevitables de la relación. El algoritmo evolutivo empleado para resolver el segundo sub-problema se comportó muy bien en varios ejemplos de prueba.

Referencias

- 1) Arrow, K.J., Raynaud, H. (1986) : *Social choice and multicriterion decision making*, MIT Press, Cambridge
- 2) Bouyssou, D., Vincke, Ph. (1995) : *Ranking alternatives on the basis of preference relations: a progress report with special emphasis on outranking relations*, Série Mathématiques de la Gestion, Université Libre de Bruxelles
- 3) Brans, J. P., Vincke Ph. (1985): A preference ranking organization method, *Management Science* 31 , 647-656.
- 4) Coello, C. (1999): A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques, *Knowledge and Information Systems 1*, 269-308
- 5) D'Avignon, G.R., Vincke, Ph. (1988): An outranking method under uncertainty, *European Journal of Operational Research* 36, 311-321
- 6) Fernández, E. Leyva, J.C (2002): Un método para resolver problemas de decisión a partir de una modelación flexible de preferencias basada en lógica borrosa, *Computación y Sistemas* 5, no. 4, 277-287
- 7) Fodor J., Roubens, M. (1994) : *Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer, Dordrecht

- 8) **French, S.** (1986) : *Decision Theory: an introduction to the mathematics of rationality*, Halsted Press, NY- Brisbane-Chichester
- 9) **Hokkanen, J., Salminen, P.**, 1997. Choosing a solid waste management system using multi criteria decision analysis. *European Journal of Operational Research* 98, no.1,19-36.
- 10) **Howard, R.A. y Matheson, J.E.** (1984) (eds.): *Readings on the principles and applications of Decision Analysis*, Strategic Decisions Group, Menlo Park, California
- 11) **Kahneman, D., Tversky, A.** (2000): *Choices, values and frames*, Cambridge University Press, New York
- 12) **Keeney, R.L., Raiffa, H.** (1976): *Decisions with multiple objectives. Preferences and value trade-offs*, Wiley, New York
- 13) **Leyva, J.C., Fernández, E.** (1999): A genetic algorithm for deriving final ranking from a fuzzy outranking relation, *Foundations of Computing and Decision Sciences* 24, no. 1, 33-47
- 14) **Leyva, J.C., Fernández, E.** (2003) : A new method for group decision support based on ELECTRE III methodology, *European Journal of Operational Research* 148, no. 1, 14-27
- 15) **Leyva, J.C.** (2000): Aplicación de los algoritmos genéticos a la solución del Problema de Decisión Multicriterio individual y en grupo”, (resumen de tesis doctoral), *Computación y Sistemas* 4, no. 2, 178-188
- 16) **Macharis C., Brans J.P., and Mareschal B.** (1998): The GDSS PROMETHEE Procedure, *Journal of Decision Systems* 7, 283-307
- 17) **Martel, J.M. , D’Avignon, G.R.** (1982): Projects ordering with multicriteria analysis, *European Journal of Operational Research* 10, no. 1, 56-69
- 18) **Michalewicz, Z.** (1996): *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York
- 19) **Mousseau, V.** (1995): Eliciting information concerning the relative importance of criteria, En: Pardalos, P., Siskos, Y. y Zopounidis, C., (eds) *Advances in Multicriteria Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London
- 20) **Mousseau, V, Dias, L.C.** (2004): Valued outranking relations in ELECTRE providing manageable disaggregation procedures, *European Journal of Operational Research* 156, no.2, 448-467
- 21) **Orlovski, S.A.** (1978): Decision-making with a fuzzy preference relation, *Fuzzy Sets and Systems* 1 , 155-167.
- 22) **Perny, P., Roy, B.** (1992): The use of fuzzy outranking relations in preference modeling, *Fuzzy Sets and Systems* 49, 33-53
- 23) **Pomerol, Ch.** (1995): Artificial Intelligence and Human Decision Making, En: Slowinski, R., (ed.) *OR: Toward Intelligent Decision Support, 14th European Conference on Operational Research*, 169-196.
- 24) **Poon P.W., Carter J.N.** (1995): Genetic algorithm crossover operators for ordering applications, *Computers & Operations Research* 22 , no. 1, 135-147
- 25) **Rogers, M., Bruen, M., Maystre, L.,** 2000. *ELECTRE and Decision Support*, Kluwer, Boston-Dordrecht-London
- 26) **Roy B.**, 1990. The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. En: Bana e Costa, C.A., (ed.) *Reading in multiple criteria decision aid*. Springer-Verlag, Berlin, 155-183.
- 27) **Roy, B.** (1996) : *Multicriteria methodology for Decision Aiding*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht- Boston- London
- 28) **Roy B., and Vanderpooten D.**(1995): The European School of MCDA: A Historical Review En: Slowinski, R. (ed.) *OR: Toward Intelligent Decision Support, 14th European Conference on Operational Research*, 39-65
- 29) **Russell, S., Norvig, P.** (1996): *Inteligencia Artificial. Un enfoque moderno*, Prentice Hall Hispanoamericana, México – Nueva York
- 30) **Siskos, Y.** (1983): Analyse de systemes de decision multicritere en univers aleatoire, *Foundations of Control Engineering* 8, 193-212
- 31) **Zopounidis, C., Dimitras, A.** (1998): *Multicriteria Decision Aid methods for the prediction of business failure.*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London



Eduardo Fernández González. *Nació en Cuba, en 1951. Licenciado en Física por la Universidad de La Habana (1973), Especialista en Microelectrónica por el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (1980), y Doctor en Ciencias Técnicas por la Universidad Tecnológica de Poznan, Polonia (1987). En la actualidad es Profesor Titular C de la Escuela de Informática de la Universidad Autónoma de Sinaloa y miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Sus áreas de interés científico abarcan los modelos matemáticos de los procesos de toma de decisiones y los sistemas inteligentes de apoyo a la decisión.*



Rafael Olmedo Pérez. *Nació en la Ciudad México, en 1956. Licenciado en Matemáticas por la Universidad Nacional Autónoma de México. Maestro en Ciencias de la Computación por la Universidad Autónoma de Sinaloa. Actualmente es Profesor Asociado D en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa, y realiza estudios de Doctorado en la Escuela de Informática de esa institución en el área de modelos y sistemas de apoyo a la decisión en grupo.*