

# Identificación de un Sistema de Fijación de Tornillos con Ruido en Mediciones

## *Identification of a Screw Fastener System with Noises in Measurements*

Raúl Ramírez López<sup>1</sup> y Roberto Salas Zúñiga<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Querétaro

Av. Tecnológico S/N, esq. Gral. Mariano Escobedo, Centro Histórico. 76000 Querétaro, Qro.

e-mail: raulramirezlopez@bigfoot.com

<sup>2</sup>Calz. del Retablo 118b. El Retablo. 76000 Querétaro, Qro.

e-mail: cenit2005@prodigy.net.mx

*Artículo recibido en Junio 06, 2005; aceptado en Septiembre 11, 2006*

### Resumen

La identificación de sistemas es una tarea anterior fundamental al control de los mismos. El estado del arte en la identificación ha permitido resolver el problema de conocer el modelo de los sistemas con alta precisión, considerando que las mediciones de las variables del sistema son realizadas sin error; o bien, efectuando algún tratamiento de filtrado. Sin embargo, existen casos donde habiendo ruido en las mediciones, este filtrado no es posible, o donde los errores son atribuibles a la modelación. Muchos de los esfuerzos hechos para resolver este problema giran alrededor de la idea de disminuir los efectos del ruido sobre las señales de interés, para después depreciar el ruido residual. Pero existen aplicaciones donde aún después de disminuir los efectos, es imposible ignorar su influencia. Como ejemplo se puede mencionar el caso de sistemas inestables, donde es necesario ejercer una acción de control mientras se efectúa la identificación, y la presencia de una señal de retroalimentación provoca polarización en los identificadores. En este trabajo, se presenta una solución al problema de identificación de sistemas con ruidos en mediciones, mediante una modificación al esquema de identificación clásico Mínimos Cuadrados Extendidos (ELS), llamada Mínimos Cuadrados Sobre-Extendidos (abreviado OELS del inglés), propuesta por el autor como tesis doctoral, es demostrada bajo ciertas condiciones y aplicada a la identificación de un sistema de fijación de tornillos, el cual está sometido constantemente a ruido en las mediciones, debido tanto a la forma de efectuar la medición, como a influencias electromagnéticas externas. Los resultados son obtenidos en simulación, pero están basados en datos directamente adquiridos del sistema atornillador, y muestran el adecuado desempeño del algoritmo OELS.

**Palabras clave:** Identificación, control, estocástico, ruido en mediciones, Mínimos Cuadrados Extendidos, ELS, Mínimos Cuadrados Sobre-Extendidos, OELS, atornilladora.

### Abstract

System identification is a fundamental previous task to system control. State of art in system identification has allowed to solve the problem of knowing the system model with high precision, considering that the system variables measurements are made without error; or making some filtering treatment. However, there are cases where, even there exist noises in measurements, the filtering treatment is not possible, or where errors are attributable to the model. Many of the efforts made to solve this problem are around of the idea of diminishing the noise effects over the interest signals, and then depreciate the residual noise. But there are applications where even after diminishing the effects is impossible to ignore its influence. As an example, it can be mentioned the case of unstable systems, where is necessary a control action while the identification is carried out, and the presence of a feedback signal leads to have biased estimators. In this work, a solution to the problem of system identification with measurement noises is presented, by means of a modification of classical identification Extended Least Squares scheme (ELS), called Over-Extended Least Squares (OELS), proposed by the author in his PhD thesis, it is proved under certain conditions and it is applied to identify a screw fastener system, which is constantly submitted to measurement noises, as much by the form the measurement is made, as by external electromagnetic influences. Results are obtained in simulation, but are based on directly acquired data from the fastener system, and show the reliable performance of the OELS algorithm.

**Keywords:** Identification, Control, stochastic, noises in measurements, noisy measurements, Least Square, Extended Least Square, Over-Extended Least Square, fastener system.

## 1 Introducción

El estado del arte en la identificación de sistemas ha permitido conocer los modelos de sistemas con gran precisión, considerando que las mediciones sobre las variables del sistema son realizadas sin error, o efectuando algún tratamiento de filtrado. Muchos de los esfuerzos que se han hecho para resolver este problema giran alrededor de la idea de disminuir los efectos sobre las señales de interés, para después desprestigiar el ruido residual. Pero existen aplicaciones donde aún después de haber disminuido los efectos, es imposible ignorar su influencia, como en el caso del modelado de sistemas inestables, donde, mientras se efectúa la identificación, es necesario ejercer una acción de control, la cual regularmente posee una señal de retroalimentación, lo que provoca polarización en los identificadores.

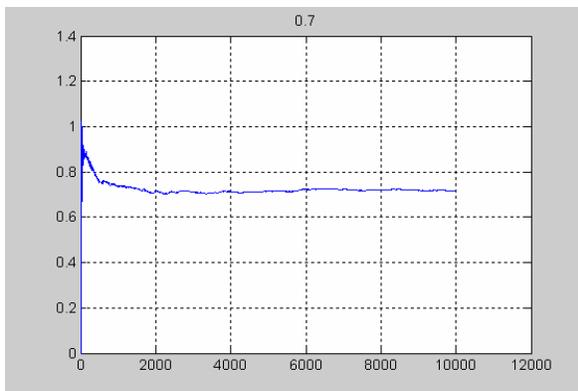
Ejemplo 1: Considere el sistema:

$$y_{t+1} = \theta \cdot y_t + w_{t+1} \quad (1)$$

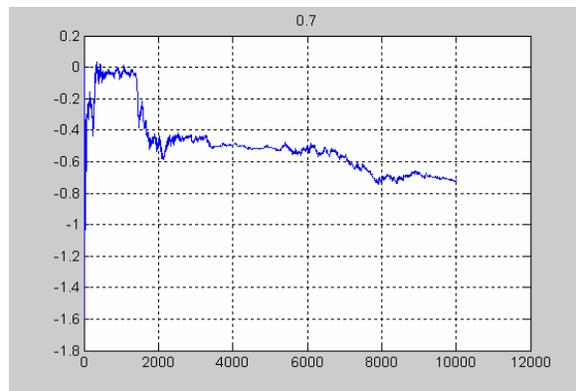
donde  $\theta$  es el parámetro a identificar y  $w_t$  es ruido blanco. El resultado al aplicar el algoritmo de mínimos cuadrados para  $\theta = 0.7$  es el mostrado en la figura 1.

Considere ahora el mismo proceso (1) pero sin ruido en el propio sistema, es decir:

$$y_{t+1} = \theta \cdot y_t \quad (2)$$



**Fig. 1.** Resultados de la estimación de parámetros del sistema 1 con ruidos descorrelacionados.



**Fig. 2.** Estimación de parámetros del sistema de la ecuación 1 sin ruido interno pero con ruido en la medición.

y considérese ahora que solo se tiene acceso a una versión ruidosa de  $y_t$ , digamos  $z_t = y_t + \eta_t$ , donde  $\eta_t$  también es ruido blanco. Combinando la ecuación del ruido y la del sistema, se ve que este proceso satisface la siguiente ecuación:

$$z_{t+1} = \theta \cdot z_t + \eta_{t+1} - \theta \cdot \eta_t \quad (3)$$

Si se aplica el mismo algoritmo para tratar de determinar el mismo parámetro, el resultado es el mostrado en la figura 2. Esto se debe a que el ruido presente en el modelo (2) es correlacionado. Esto implica que el estimador usado anteriormente es polarizado, aun sin tener ruido interno en el sistema.

En [1] y [2] se presentan los primeros intentos modernos en la búsqueda de la solución a este problema. En [7], [34], [35], [37] se presentan algoritmos de estimación consistentes fuera de línea. Los resultados son buenos; sin embargo la dificultad de los cálculos no permite utilizarlos en aplicaciones de control en tiempo real. Los resultados más recientes a este respecto, sin que el problema sea resuelto, se publican en [5], [8], [18], [20], [24], [26], [37], [38], [39], [42].

En [27] a [30] se presentan los primeros pasos seguidos para llegar al método aquí presentado. Entre algunas de las ideas exploradas para encontrarlo, se encuentran el Máximo de Verosimilitud ([6], [13], [15], [19] y [40]), el algoritmo EM (Estimación-Maximización) [15], el método de Kullback- Liebler [41] y una propuesta a la econometría [22] que en principio se usó como base para ser aplicada a las condiciones aquí planteadas; sin embargo las hipótesis utilizadas son difíciles de satisfacer en la realidad y el método se torna sumamente complejo para implementarlo en tiempo real. Se tomaron algunas ideas de [3], [10], [21] y [36].

Este trabajo, inédito del autor y que forma parte de su tesis doctoral, propone una solución al problema de la identificación de sistemas cuando las mediciones son tomadas con ruido, ya sea por la propia naturaleza de la medición (ruido electromagnético, vibraciones, interferencias, etc.) o por errores en el modelo, lo cual puede ser considerado ruido de medición. Por ejemplo, si un sistema es modelado linealmente y su comportamiento cumple esta condición solo cerca de un punto de operación, al funcionar lejos de dicho punto se obtendrán errores que pueden ser considerados ruidos de medición. No ha sido presentado anteriormente en ningún foro, salvo los intentos mencionados en los párrafos anteriores para solucionar el problema.

Algunos fundamentos utilizados en este trabajo están en [4], [9], [12], [14], [16], [17], [23], [31] y [32]. En [33] se presenta completo el Teorema de Wold, bien conocido en la teoría de la probabilidad, y que es ampliamente utilizado en la demostración del teorema fundamental de este trabajo.

Maravall realizó un análisis sobre la existencia de la solución considerando una densidad espectral racional de los ruidos [25]. El análisis realizado se basa en un modelo de sistema similar al aquí considerado, pero en lazo abierto y sin ruido en las mediciones. Sobre este resultado y el realizado por Chen [11] principalmente, se hace la propuesta fundamental de este trabajo.

En este artículo, se presentan dos aplicaciones del algoritmo OELS propuesto. Primero, se efectúa la identificación de un sistema ficticio, es decir, no real, con parámetros conocidos, pero realmente identificados mediante el algoritmo OELS. Segundo, se presenta la aplicación del algoritmo a la identificación de una sección de un sistema de fijación de tornillos, o atornilladora, empleada en una línea de armado de ejes automotrices. Se respeta la confidencialidad de la planta que otorgó el permiso para la toma de datos, por lo que no se presentan diagramas, fotografías ni detalles del sistema en cuestión, lo que no afecta al objetivo principal del trabajo, es decir, mostrar la confiabilidad del algoritmo OELS propuesto.

## 2 Características de la Familia de Sistemas Considerada

Lo que sigue es la descripción de la familia de sistemas a las que el algoritmo OELS puede ser aplicado, y enseguida, el algoritmo propuesto para la identificación de dichos sistemas.

i. La **planta** es descrita por la siguiente ecuación:

$$A(z^{-1})y_n = B(z^{-1})u_n + C(z^{-1})\varepsilon_n \tag{4}$$

$$A(z^{-1}) = 1 - \sum_{j=1}^{ord(A)} A_j z^{-j} \qquad B(z^{-1}) = \sum_{j=1}^{ord(B)} B_j z^{-j} \qquad C(z^{-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{ord(C)} C_j z^{-j}$$

$$z^{-1}(\bullet)_n = (\bullet)_{n-1} \qquad (\bullet)_n = (\bullet)(n \cdot T_s)$$

donde:

- y es la **variable de salida**,
- u es la **variable de entrada**,
- ε es el **ruido del sistema**,

$T_s$  es el **periodo de muestreo** que se asume constante,  
 $ord(\cdot)$  es el **orden del polinomio**  $(\cdot)$ .

La transpuesta de una matriz  $M$  se designará por  $M'$ .

ii. Las variables “verdaderas” del sistema no se pueden acceder directamente. En el caso de las variables de entrada y salida, esto significa que son medidas con error:

$$\tilde{y}_n = y_n + D(z^{-1})\zeta_n \tag{5}$$

$$\tilde{u}_n = u_n + E(z^{-1})v_n \tag{6}$$

$$D(z^{-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{ord(D)} D_j z^{-j}, \quad E(z^{-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{ord(E)} E_j z^{-j}$$

donde  $v_n$  y  $\zeta_n$  son variables de ruido blanco independientes entre sí y de  $u, y$  y de  $\varepsilon$

iii. La **variable de entrada medida** sigue un proceso tipo ARMA generado por un sistema de control de la siguiente forma:

$$\tilde{u}_n = \alpha \tilde{u}_{n-1} + K(z^{-1})e_n \tag{7}$$

$$\alpha \cong 1 \text{ y } \alpha < 1 \quad e_n = r_n - \tilde{y}_n \quad K(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{ord(K)} K_j z^{-j}$$

donde:

- $r$  es la **referencia** en el sistema de control.
- $e$  es el **error de control**.

Se supone también que el polinomio  $K(z^{-1})$  tiene todas sus raíces fuera del círculo unitario.

Se supone además, que se conocen los órdenes  $ord(A)$ ,  $ord(B)$ ,  $ord(C)$ ,  $ord(D)$  y  $ord(E)$ . Si esta suposición no es verdadera, estos órdenes pueden ser estimados con el siguiente procedimiento, el que ha sido usado y probado experimentalmente con éxito: se escoge un intervalo de los números naturales que razonablemente incluya a los verdaderos; se aplica el algoritmo ELS (*Extended Least Squares* [26]) al sistema para cada elemento de esos intervalos como el orden desconocido, y se toma como el estimado del verdadero a aquel que arroje la menor norma de error en la estimación.

**Hipótesis:**

- i.  $y, u$  y  $\varepsilon$  son procesos estocásticos conjuntamente estacionarios.
- ii.  $\varepsilon$  es una variable de ruido blanco independiente de la variable de entrada  $u$ .
- iii. Las raíces de los polinomios  $A(z^{-1})$  y  $C(z^{-1})$  están fuera del círculo unitario.
- iv. **Condiciones de Identificabilidad.** Para que el sistema sea identificable, es necesario que una de las siguientes condiciones sea verdadera:

$$1. \text{ Si } ord(A) > ord(B) \Rightarrow \tag{8a}$$

$$\text{ord}(A) \geq \text{ord}(C) + \text{ord}(E) + 2 \quad \text{y} \quad \text{ord}(B) \geq \text{ord}(C) + \text{ord}(D) + 1$$

$$2. \quad \text{Si } \text{ord}(A) < \text{ord}(B) \Rightarrow$$

$$\text{ord}(A) \geq \text{ord}(C) + \text{ord}(E) + 1 \quad \text{y} \quad \text{ord}(B) \geq \text{ord}(C) + \text{ord}(D) + 2 \tag{8b}$$

$$3. \quad \text{Si } \text{ord}(A) = \text{ord}(B) \Rightarrow$$

$$\text{ord}(A) \geq \text{ord}(C) + \max(\text{ord}(D), \text{ord}(E)) + 2 \tag{8c}$$

Además es necesario que las raíces de los polinomios  $A$  y  $C$  estén fuera del círculo unitario:

$$|z| > 1, \forall z | A(z) = 0 \text{ o } C(z) = 0 \tag{9}$$

Estas condiciones de identificabilidad acatan la hipótesis de Maravall [25] cuando el sistema se estudia en lazo abierto. Esto significa que cuando el sistema se restringe a las condiciones dadas por Maravall [25], las condiciones de identificabilidad aquí dadas y las de Maravall coinciden. Queda como trabajo futuro el establecimiento de una prueba formal de que esta condición es necesaria y suficiente para la convergencia del algoritmo OELS en sentido fuerte probabilístico (casi en todas partes) bajo las características del sistema e hipótesis dadas en éste trabajo. Experimentalmente la validez de esta afirmación ha sido probada por el autor.

### 3 Mínimos Cuadrados Sobre-Extendidos: Algoritmo Recursivo de Identificación en Línea con Ruido en Mediciones

0. Elegir  $\text{ord}(\tilde{C})$  como  $\max(\text{ord}(A), \text{ord}(B), \text{ord}(C))$ . Inicializar

$$P_0 = p_0 \cdot I, \text{ con } p_0 \gg 1 \text{ e } I \text{ la matriz identidad de orden } \text{ord}(A) + \text{ord}(B) + \text{ord}(\tilde{C}) - 3$$

$$\theta_0 \in \mathbb{R}^{\text{ord}(A) + \text{ord}(B)} \text{ arbitrario (generalmente el vector } 0).$$

1. Para cada ciclo  $n > 0$  de identificación, formar el regresor estocástico con las mediciones ruidosas:

$$\phi_n = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{n-1}, \tilde{y}_{n-2}, \dots, \tilde{y}_{n-\text{ord}(A)}, \\ \tilde{u}_{n-1}, \tilde{u}_{n-2}, \dots, \tilde{u}_{n-\text{ord}(B)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{n-1}, \tilde{\varepsilon}_{n-2}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{n-\text{ord}(\tilde{C})} \end{bmatrix}$$

donde  $\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{y}_n - \phi_n^t \theta_{n-1}$  es la estimación del ruido en planta para el instante  $n$ .

2. Calcular (algoritmo ELS)

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{1}{1 + \phi_n^t P_{n-1} \phi_n} \cdot P_{n-1} \cdot \phi_n \cdot \tilde{\varepsilon}_n$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{1}{1 + \phi'_n \cdot P_{n-1} \cdot \phi_n} \cdot (P_{n-1} \cdot \phi_n) \cdot (P_{n-1} \cdot \phi_n)'$$

3. Estimar la varianza  $\sigma_\varepsilon^2$  de los ruidos de la planta.
4. Cuando el cambio en los estimados sea menor a un criterio inicialmente establecido, es decir, cuando se supone que se alcanzaron los parámetros con un error pequeño, suponer que

$$\theta_n = [A' B']',$$

Entonces resolver el sistema de ecuaciones de covarianzas

$$F_k(\mathcal{G}) = 0$$

$$F_k(\mathcal{G}) = \sigma_\zeta^2 \sum_{m=k}^{ord(A)+ord(D)} A * D(m) \times A * D(m-k) + \sigma_v^2 \sum_{m=k}^{ord(B)+ord(E)} B * E(m) \times B * E(m-k) + \sigma_\varepsilon^2 \sum_{m=k}^{ord(C)} C_m C_{m-k} - \rho_k \left( \begin{matrix} \sim \\ \xi \end{matrix} \right) = 0 \quad (10)$$

$$0 \leq k \leq ord(\xi)$$

(\* representa convolución) para

$$\mathcal{G} = (C_1, \dots, C_{ord(C)}, D_1, \dots, D_{ord(D)}, E_1, \dots, E_{ord(E)}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2, \sigma_v^2)$$

de donde se obtendrán el resto de los coeficientes  $C, D$  y  $E$ , así como las varianzas  $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2$  y  $\sigma_v^2$ .

#### 4 Análisis de Convergencia

**Teorema:** Dado un sistema con las características dadas en la sección II (*Características de la Familia de Sistemas Considerada*), se puede encontrar un natural  $ord(\tilde{C})$  tal que, al aplicar el algoritmo de Mínimos Cuadrados Sobre-Extendidos, se tendrá convergencia fuerte para los parámetros de la planta y para las varianzas del ruido de la planta y de las mediciones.

**Demostración:** Al combinar las ecuaciones (5) y (4) se obtiene (en lo que sigue y no cause confusión, se omite  $(z^{-1})$  en los polinomios para simplificar la notación):

$$A \tilde{y}_n = B \tilde{u}_n + AD \zeta_n - BE v_n + C \varepsilon_n \quad (11)$$

que es la ecuación que modela el sistema cuya entrada  $\tilde{u}$  y salida  $\tilde{y}$  son las mediciones de las variables  $u$  y  $y$  con los errores  $v_n$  y  $\zeta_n$ , respectivamente. Nótese que en este modelo los coeficientes de  $\tilde{y}$  y de  $\tilde{u}$  son los mismos que para  $y$  y  $u$ , respectivamente. El error “interno” de esta nueva planta, a la que se denomina **planta auxiliar**, es conformado por una combinación lineal de los errores internos  $\varepsilon$  y de medición,  $\zeta$  y  $v$ , de la planta original.

La nueva variable de error es una secuencia aleatoria estacionaria, pues es combinación lineal de secuencias aleatorias estacionarias, y, de acuerdo al teorema de expansión de Wold [33], se descompone en una secuencia singular y otra regular:

$$AD\zeta_n - BE\nu_n + C\varepsilon_n = \tilde{\varepsilon}^s + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{C}_i \tilde{\varepsilon}_{n-i}$$

donde  $\sum_{i=0}^{\infty} |\tilde{C}_i|^2 < \infty$  y  $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_n)$  es una secuencia de innovación (para la secuencia regular  $\tilde{\varepsilon}^r$ ). Sin embargo, para emplear esta igualdad en un modelo, se debe omitir la secuencia singular  $\tilde{\varepsilon}^s$ , pues la mejor estimación de esta es cero, de acuerdo a las conclusiones del teorema de expansión de Wold. Por tanto, el modelo para el sistema (11) es de la forma:

$$\tilde{A}(z^{-1})\tilde{y}_n = \tilde{B}(z^{-1})\tilde{u}_n + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{C}_i \tilde{\varepsilon}_{n-i}$$

Sin embargo, el número infinito de coeficientes en este modelo impide su identificación. Para hacerlo útil, se debe considerar una suma finita de términos. Esto es factible tomando en cuenta que  $\sum_{i=0}^{\infty} |\tilde{C}_i|^2 < \infty$  implica que, para toda  $\varepsilon > 0$  (diferente de  $\varepsilon$ , por supuesto) existe un  $ord(\tilde{C}) = ord(\tilde{C})(\varepsilon) \in \mathbf{N}$  tal que:

$$\sum_{i=ord(\tilde{C})+1}^{\infty} \tilde{C}_i \tilde{\varepsilon}_{n-i} < \varepsilon$$

El modelo es, pues:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z^{-1})\tilde{y}_n &= \tilde{B}(z^{-1})\tilde{u}_n + \tilde{C}(z^{-1})\tilde{\varepsilon}_n \\ \text{con } \tilde{C}(z^{-1}) &= \sum_{i=0}^{ord(\tilde{C})} \tilde{C}_i z^{-i} \end{aligned} \tag{12}$$

donde  $ord(\tilde{C}) = ord(\tilde{C})(\varepsilon)$  está en función del error  $\varepsilon$  que resulta del uso de un modelo inexacto con esta suma finita de términos, y no la serie infinita completa.

Al aplicar el algoritmo ELS a este sistema, con las variables medidas como entradas al algoritmo, con los ordenes polinomiales adecuados, se obtienen los coeficientes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  y  $\tilde{C}$  de la planta auxiliar, y, de acuerdo a la propiedad de convergencia del algoritmo ELS, conforme avanza la estimación, los coeficientes  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  tienden a los verdaderos A y B, lo que demuestra la convergencia a los primeros coeficientes de la planta, y se justifica la suposición del paso 4 en el procedimiento del mismo (ver sección III “*Mínimos Cuadrados Sobre-Extendidos: Algoritmo Recursivo de Identificación en Línea con Ruido en Mediciones*”). Entonces, para que la identificación se complete, solo se requiere conocer los coeficientes polinomiales C, D y E y las varianzas  $\sigma_\varepsilon^2 = \mathbf{E}(\varepsilon_n \varepsilon_n)$ ,  $\sigma_\zeta^2 = \mathbf{E}(\zeta_n \zeta_n)$  y  $\sigma_\nu^2 = \mathbf{E}(\nu_n \nu_n)$ . Bajo algunas condiciones, esto es posible a partir de la solución del **sistema de ecuaciones de covarianza de ruidos en el sistema**, que en lo sucesivo se denominará simplemente **sistema de ecuaciones de covarianza**. Enseguida son expuestos su cálculo y dichas condiciones de solubilidad. Sea, pues,

$$\xi_n = AD\zeta_n - BEv_n + C\varepsilon_n \tag{13}$$

el ruido **real** en la planta auxiliar. Se le denomina *real* para diferenciarlo del **estimado**, es decir, del error en el modelo:

$$\tilde{\xi}_n = \tilde{C}(z^{-1})\tilde{\varepsilon}_n \tag{14}$$

pero no debe olvidarse que  $\tilde{\xi}$  representa a  $\xi$  (si se elige  $ord(\tilde{C})$  adecuadamente) en el modelo de la planta auxiliar,

y que de  $\tilde{\xi}$  es posible calcular las propiedades estadísticas de  $\xi$ , pues aquel se obtiene durante el proceso de estimación.

Al retardar  $k$  periodos de muestreo a  $\xi$  en (13), se obtiene:

$$\xi_{n-k} = AD\zeta_{n-k} - BEv_{n-k} + C\varepsilon_{n-k} \tag{15}$$

A fin de obtener las ecuaciones de covarianza, se multiplica  $\xi_{n-k}$  por  $\xi_n$  y se aplica la esperanza. Los términos que contienen productos entre ruidos de diferentes variables ( $\varepsilon, v, \zeta$ ) se anulan por ser independientes entre sí. Así, solo es necesario analizar las esperanzas entre ruidos de la misma naturaleza. Por tanto, en la siguiente igualdad se omiten las esperanzas de ruidos cruzados:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi_n \xi_{n-k}) &= \mathbf{E}(\xi_0 \xi_{-k}) = \\ \mathbf{E}(\xi_0 \xi_k) &= \mathbf{E}(AD\zeta_0 \cdot AD\zeta_k) + \\ &\mathbf{E}(BEv_0 \cdot BEv_k) + \\ &\mathbf{E}(C\varepsilon_0 \cdot C\varepsilon_k) \end{aligned} \tag{16}$$

Considérese un término genérico:

$$\begin{aligned} M(z^{-1})N(z^{-1})x_k &= M(z^{-1}) \left[ \sum_{i=0}^{ord(N)} N_i x_{k-i} \right] = \sum_{i=0}^{ord(N)} \sum_{j=0}^{ord(M)} N_i M_j x_{k-i-j} = \sum_{i=0}^{ord(M)} \sum_{j=0}^{ord(N)} M_j N_i x_{k-i-j} \\ &= M_0 N_0 x_k + (M_0 N_1 + M_1 N_0) x_{k-1} + \dots + \left( \sum_{\substack{i+j=m \\ 0 \leq i \leq ord(M) \\ 0 \leq j \leq ord(N)}} M_i N_j \right) x_{k-m} + \dots + \left( \sum_{\substack{i+j=ord(N)+ord(M) \\ 0 \leq i \leq ord(M) \\ 0 \leq j \leq ord(N)}} M_i N_j \right) x_{k-(ord(N)+ord(M))} \\ &= \sum_{m=0}^{ord(N)+ord(M)} \left( \sum_{\substack{i+j=m \\ 0 \leq i \leq ord(M) \\ 0 \leq j \leq ord(N)}} M_i N_j \right) x_{k-m} = \sum_{m=0}^{ord(N)+ord(M)} \left( \sum_{i=\max(0, m-ord(N))}^{\min(m, ord(M))} M_i N_{m-i} \right) x_{k-m} = \sum_{m=0}^{ord(N)+ord(M)} \left( \sum_{i=\max(0, m-ord(M))}^{\min(m, ord(N))} M_{m-i} N_i \right) x_{k-m} \end{aligned}$$

$$M(z^{-1})N(z^{-1})x_k = \sum_{m=0}^{ord(N)+ord(M)} M * N(m)x_{k-m} \tag{17}$$

donde  $M * N(m)$  representa la convolución de  $M$  y  $N$  evaluada en  $m$ . También de modo genérico, si  $\mathbf{E}(\chi_i \chi_j) = 0, i \neq j$  y  $\mathbf{E}(\chi_i \chi_i) = \sigma_\chi^2$ :

$$\mathbf{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{ord(a)} a_j \chi_{n-j} \right) \left( \sum_{j=0}^{ord(b)} b_j \chi_{n-k-j} \right) \right] = \mathbf{E} \left( \sum_{j=k}^{\min(ord(a), ord(b)+k)} a_j b_{j-k} \chi_{n-j} \chi_{n-j} \right) = \begin{cases} \sigma_\chi^2 \sum_{j=k}^{\min(ord(a), ord(b)+k)} a_j b_{j-k}, & \text{si } ord(a) \geq k \\ 0, & \text{si } ord(a) < k \end{cases} \tag{18}$$

Sustituyendo (17) y (18) en (16), se obtiene el sistema de ecuaciones de covarianzas buscado. Para el primer término de (16):

$$\mathbf{E}(AD\zeta_n \cdot AD\zeta_{n-k}) = \mathbf{E} \left( \sum_{m=0}^{ord(A)+ord(D)} A * D(m)\zeta_{n-m} \times \sum_{m=0}^{ord(A)+ord(D)} A * D(m)\zeta_{n-k-m} \right) = \sigma_\zeta^2 \sum_{m=k}^{ord(A)+ord(D)} A * D(m) \times A * D(m-k)$$

Así, operando de modo similar para los demás términos, se tiene:

$$\mathbf{E}(\xi_n \xi_{n-k}) = \sigma_\zeta^2 \sum_{m=k}^{ord(A)+ord(D)} A * D(m) \times A * D(m-k) + \sigma_v^2 \sum_{m=k}^{ord(B)+ord(E)} B * E(m) \times B * E(m-k) + \sigma_\varepsilon^2 \sum_{m=k}^{ord(C)} C_m C_{m-k} \tag{19}$$

para  $0 \leq k \leq ord(\xi)$ ,  $ord(\xi) \equiv \max \begin{pmatrix} ord(A)+ord(D) \\ ord(B)+ord(E) \\ ord(C)+ord(D)+ord(E)+2 \end{pmatrix}$

Es decir, se obtiene un sistema de  $ord(\xi)+1$  ecuaciones no lineales. Nótese que los coeficientes desconocidos son los de  $C, D$  y  $E$  así como las varianzas  $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2$  y  $\sigma_v^2$  pues los de  $A$  y  $B$  se tienen a partir de los resultados de la identificación en línea.

El primer miembro de (19) es:

$$\rho_k(\xi) \equiv \mathbf{E}(\xi_n \xi_{n-k}) = \rho_k(\tilde{\xi}) \equiv \mathbf{E}(\tilde{\xi}_n \tilde{\xi}_{n-k}) = \mathbf{E}(\tilde{\xi}_0 \tilde{\xi}_k) = \mathbf{E}(\tilde{C}(z^{-1})\tilde{\varepsilon}_0 \tilde{C}(z^{-1})\tilde{\varepsilon}_k) = \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2 \sum_{j=k}^{ord(\tilde{C})} \tilde{C}_j \tilde{C}_{j-k}$$

que son conocidos a partir de la aplicación del algoritmo ELS a la planta auxiliar. El sistema de ecuaciones de covarianza se escribe, entonces, como la función multivariable en  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{F}_k(\mathcal{G}) = 0$$

$$\mathcal{F}_k(\mathcal{G}) = \sigma_\zeta^2 \sum_{m=k}^{ord(A)+ord(D)} A * D(m) \times A * D(m-k) + \sigma_v^2 \sum_{m=k}^{ord(B)+ord(E)} B * E(m) \times B * E(m-k) + \sigma_\varepsilon^2 \sum_{m=k}^{ord(C)} C_m C_{m-k} - \rho_k(\tilde{\xi}) \tag{20}$$

donde:

$$\mathcal{G} = (C_1, \dots, C_{ord(C)}, D_1, \dots, D_{ord(D)}, E_1, \dots, E_{ord(E)}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2, \sigma_v^2)$$

$$\mathcal{G} \in \mathbf{R}^{ord(C)+ord(D)+ord(E)+3}, \quad 0 \leq k \leq ord(\xi)$$

de cuya solución se obtienen los parámetros  $\mathcal{G}$ . Para que (20) tenga una solución, es necesario que su Jacobiano sea de rango pleno, el cual está dado por:

$$J(\mathcal{F}) = [J_l(\mathcal{F}_k)]_{\substack{l \in [1, ord(C)+ord(D)+ord(E)+3] \\ k \in [0, ord(\xi)]}} \tag{21}$$

Para cuando  $l$  corresponde a los coeficientes de  $C$ , se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_k(\mathcal{G})}{\partial C_l} = \frac{\partial}{\partial C_l} \left[ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{m=k}^{ord(C)} C_m C_{m-k} \right] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{m=k}^{ord(C)} \frac{\partial}{\partial C_l} (C_m C_{m-k}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{m=k}^{ord(C)} \left( C_{m-k} \frac{\partial}{\partial C_l} C_m + C_m \frac{\partial}{\partial C_l} C_{m-k} \right)$$

Si  $k \leq \frac{1}{2} ord(C)$  entonces en la derivada parcial anterior pueden prevalecer ambos términos, dependiendo del valor de  $l$ . Si  $k > \frac{1}{2} ord(C)$ , solo uno de ellos puede no ser nulo:

- Si  $(1 \leq l < k)$  y  $\left(k \leq \frac{1}{2} ord(C)\right)$  o  $(1 \leq l < ord(C) - k)$  y  $\left(k > \frac{1}{2} ord(C)\right)$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_k(\mathcal{G})}{\partial C_l} = \sigma_\varepsilon^2 C_{l+k} \tag{22}$$

- Si  $k \leq l \leq ord(C) - k$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_k(\mathcal{G})}{\partial C_l} = \sigma_\varepsilon^2 (C_{l-k} + C_{l+k}) \tag{23}$$

- Si  $(ord(C) - k < l \leq ord(C))$  y  $\left(k \leq \frac{1}{2} ord(C)\right)$  o  $(k < l \leq ord(C))$  y  $\left(k > \frac{1}{2} ord(C)\right)$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_k(\mathcal{G})}{\partial C_l} = \sigma_\varepsilon^2 C_{l-k} \tag{24}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_k(\mathcal{G})}{\partial D_l} = \frac{\partial}{\partial D_l} \left[ \sigma_\zeta^2 \sum_{m=k}^{ord(A)+ord(D)} \left( \sum_{i=\max(0, m-ord(A))}^{\min(m, ord(D))} A_{m-i} D_i \right) \left( \sum_{i=\max(0, m-k-ord(A))}^{\min(m-k, ord(D))} A_{m-k-i} D_i \right) \right]$$

$$= \sigma_\zeta^2 \sum_{m=k}^{ord(A)+ord(D)} A_{m-k-l} \sum_{i=\max(0, m-ord(A))}^{\min(m, ord(D))} A_{m-i} D_i + \sigma_\zeta^2 \sum_{m=k}^{ord(A)+ord(D)} A_{m-l} \sum_{i=\max(0, m-k-ord(A))}^{\min(m-k, ord(D))} A_{m-k-i} D_i \tag{25}$$

De modo similar para las derivadas parciales que corresponden a los coeficientes de  $E$ . Para los últimos términos se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k(\mathcal{G})}{\partial \sigma_\zeta^2} &= \sum_{j=k}^{ord(A)+ord(D)} \left( \sum_{m=0}^j A_m D_{j-m} \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{j-k} A_m D_{j-k-m} \right) \\ \frac{\partial F_k(\mathcal{G})}{\partial \sigma_v^2} &= \sum_{j=k}^{ord(B)+ord(E)} \left( \sum_{m=0}^j B_m E_{j-m} \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{j-k} B_m E_{j-k-m} \right) \\ \frac{\partial F_k(\mathcal{G})}{\partial \sigma_\varepsilon^2} &= \sum_{j=k}^{ord(C)} C_j C_{j-k} \end{aligned} \tag{26}$$

Las ecuaciones 22 a 26 constituyen el Jacobiano del sistema de covarianzas, del que se deben obtener las condiciones suficientes para que dicho sistema tenga solución. En este trabajo no se desarrolla el cálculo de  $J(F)$ ; se efectúa numéricamente para encontrar la solución del sistema de covarianzas. Sin embargo, para determinar de manera genérica las condiciones de solubilidad de este sistema, es necesario encontrar  $J(F)$  también de modo genérico. Sin embargo, al resolver de manera numérica el sistema de covarianzas, se encuentra que las condiciones dadas en 8 y 9 son suficientes en todos los casos tratados. Más aun, dichas condiciones, al restringirlas a las dadas por Maravall, es decir, sin ruido en las mediciones y en lazo abierto, coinciden con las dadas en su análisis.

En el algoritmo propuesto se resuelve el sistema de ecuaciones de covarianzas cuando se tiene alguna certidumbre sobre los estimados. Si se resuelve en cada ciclo de identificación, se dificultaría y retrasaría considerablemente la operación, ya que el tiempo de cómputo para la resolución de este sistema es considerablemente mayor que el de identificación. Por tanto, es cuestión de conveniencia resolver el sistema de ecuaciones de covarianza cuando se tiene la certidumbre, de acuerdo al criterio establecido, de la proximidad de los estimados para  $A$  y para  $B$ .

## 5 Aplicaciones

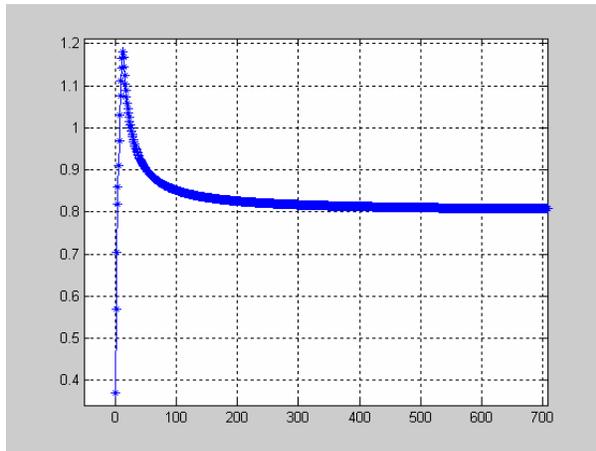
Se presentan dos aplicaciones del método OELS. En la primera, se aplica a la identificación de un sistema ficticio (es decir, no real, con parámetros propuestos por el autor), con el objetivo de mostrar la capacidad del algoritmo al identificar real y correctamente los coeficientes del sistema bajo ruido en las mediciones (generado artificialmente durante la identificación) y bajo un esquema de control PID. En la segunda se caracteriza una máquina atornilladora, de la cual se obtuvieron datos de entrada y salida en tiempo real mediante una tarjeta de adquisición de datos, y posteriormente se aplicó el método fuera de línea a dichos datos.

**Sistema ficticio.** El sistema que sirve de ejemplo en esta aplicación es el siguiente:

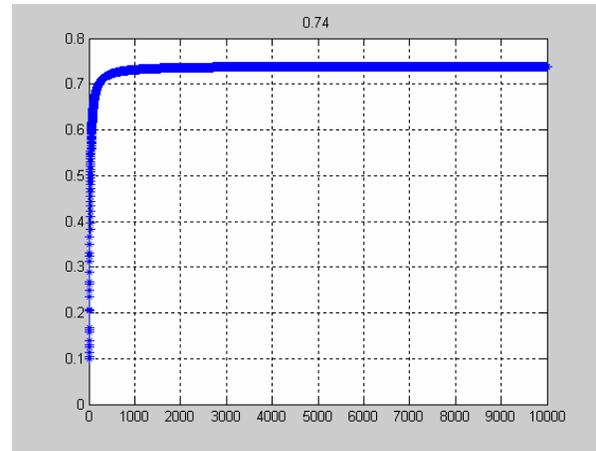
$$\begin{aligned} A &= [0.8 \ 0.74 \ -0.592 \ -0.1225 \ 0.098] \\ B &= [1 \ 0.5 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6] \\ C &= 1 \\ D &= [1 \ 0.8] \\ E &= [1 \ 0.6] \\ \sigma_\zeta^2 &= \sigma_v^2 = \sigma_\varepsilon^2 = 0.5 \\ K &= [0.55 \ -0.5 \ 0] \text{ (Control)} \end{aligned}$$

La referencia del sistema es 30.

Al aplicar la metodología OELS se obtienen las gráficas 3 y 4:

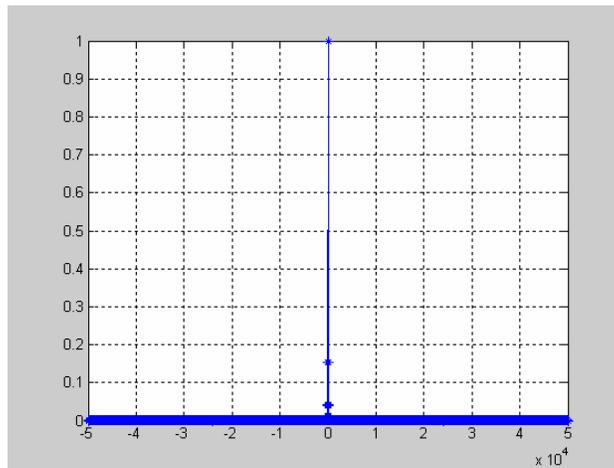


**Fig. 3.** Identificación del primer parámetro. Se observa la tendencia a 0.8, que es el real



**Fig. 4.** Identificación del segundo parámetro (0.74)

El comportamiento de la identificación de los demás parámetros es muy similar. La figura 5 muestra la correlación del ruido estimado.



**Fig. 5.** Correlación del ruido de estimación

Nótese que la identificación es correcta al comparar con los parámetros originales.

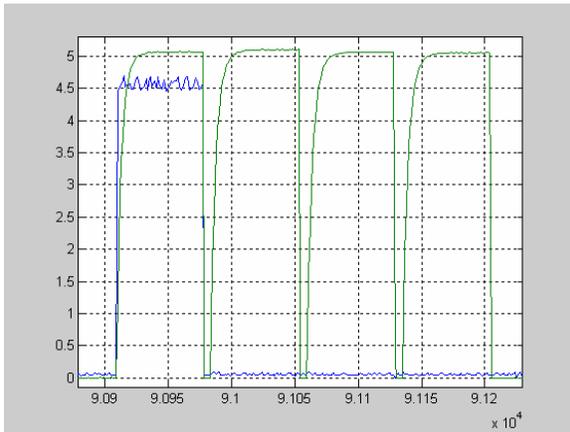
**Sistema atornillador.** El sistema en cuestión es una máquina atornilladora marca Cooper, de 4 husillos (elementos para atornillar), perteneciente a la empresa ETRAC S. A. de C. V., donde se le identifica como COOPER 585. No se tiene el modelo matemático de ésta atornilladora, ni se tiene conocimiento de que haya sido obtenido antes. Dicha atornilladora es usada para la fabricación de una sección de los ejes tractivos de vehículos automotores. Por respeto a los estatutos de confidencialidad de la empresa, no se describe con detalle dicho sistema ni se presentan ilustraciones del mismo.

La sección de la atornilladora de interés en este estudio es la sección de potencia del mismo, consistente del conjunto de motores que aplican el par deseado a tornillos usados en el armado de los ejes.

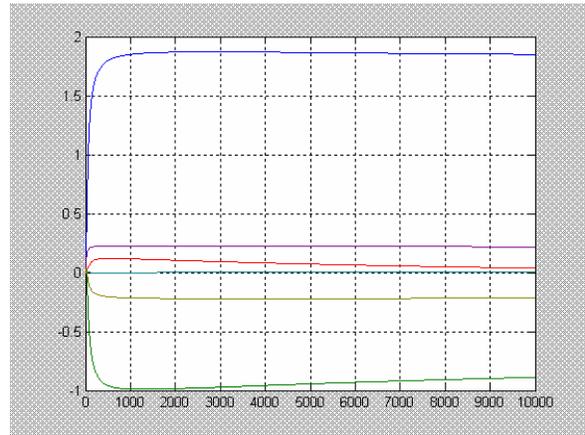
El estudio que se presenta parte de la toma de datos de entrada y salida de la sección de potencia del sistema, el cual ya funciona bajo control PID, cuyos parámetros son desconocidos. De esta sección de la atornilladora se obtiene un modelo a través de la aplicación del algoritmo expuesto. No es de interés la obtención del modelo de la atornilladora completa.

Al capturar los datos mediante una tarjeta de adquisición, se obtienen resultados como los mostrados en la figura 6.

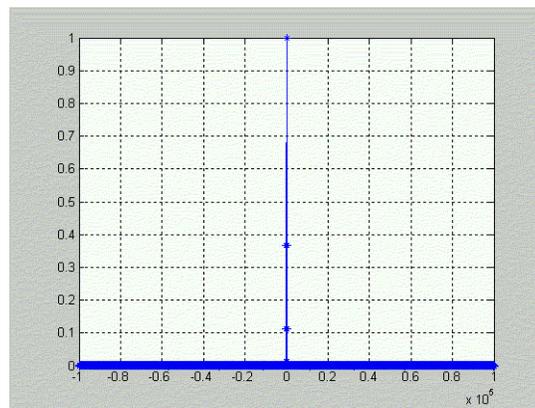
Tras la aplicación del método OELS, se obtienen las gráficas de la figura 7. Los demás parámetros se mantienen en cero. La correlación del ruido del sistema se muestra en la figura 8.



**Fig. 6.** Datos de salida (cuatro pulsos; señal de mayor amplitud). Se muestra también la señal de sincronía, que indica el inicio de un ciclo válido (un solo pulso; señal de menor amplitud).



**Fig. 7.** Identificación de parámetros de la atornilladora Cooper\_585



**Fig. 8.** Correlación del ruido de estimación del sistema atornillador

## 6 Análisis de Resultados y Conclusiones

Se presentó un algoritmo de identificación de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Se presentaron dos ejemplos: el primero generado artificialmente, y los parámetros, conocidos en principio, se identifican correctamente.

La correcta identificación de los parámetros conocidos a priori ha sido repetida con todos los sistemas igualmente ficticios que cumplen con las condiciones de identificabilidad expuestas y con un margen de ruido razonable. Esto, desde un punto de vista práctico, ha generado la confianza para que el algoritmo hubiese sido aplicado en sistemas reales.

El segundo ejemplo es un sistema atornillador de la empresa ETRAC, del grupo Spicer. Aquí se obtiene un modelo para un sistema real. No existe un *modelo real*, y por tanto, no hay *parámetros reales*, y menos aun se puede realizar una comparación entre reales y calculados: se tiene un sistema real, al que se puede asociar un modelo. En este sentido, la validez del modelo obtenido no está en relación con la cercanía de los parámetros calculados a los *reales*, sino con la utilidad del mismo para predecir el funcionamiento del sistema, lo que se observa en las gráficas mostradas. Particularmente, la gráfica de correlación de ruidos residuales revela que el método arrojó un modelo útil que podrá ser utilizado en un lazo de control externo y que la aplicación del esquema resultante podrá ser aplicada sin mayores problemas.

Como trabajo futuro, se debe efectuar un estudio sobre la solución genérica del sistema de ecuaciones de covarianza para encontrar las condiciones de identificabilidad también genéricamente. También es factible que la solución de dicho sistema pueda ser simplificado, para insertar dicha solución en el algoritmo en línea.

## Agradecimientos

El autor expresa su agradecimiento a los Ingenieros Gilberto Barroso Gil y Juan Carlos Palos, de la empresa Ejes Tractivos, S. A. de C. V., por su colaboración para la toma de datos de las atornilladoras Cooper, así como por su autorización para presentarlos en este artículo.

## Referencias

1. **T. W. Anderson**, Linear Latent Variable Models and Covariance Structures, *Journal of Econometrics* 41 (1989), 91-119. North-Holland.
2. **Anderson, T. W.** The statistical analysis of time series. John Wiley & Sons, Inc. 1971.
3. **Aguado, A., Ramírez, R.** Tópicos Especiales de Control Inteligente y Adaptable. Registro Público en SEP-INDAUTOR # 03-2001- 053117024000-01.
4. **strom, K. J., Eykhoff, P.** System Identification- A Survey. *Automatica*, Vol. 7, pp. 123-162. Pergamon Press, 1971.
5. **Neil J. Bershad**, Stochastic Analysis of Gradient Adaptive Identification of Nonlinear Systems with Memory for Gaussian Data and Noisy Input and Output Measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 47, No. 3, pags. 675-689, March 1999.
6. **B. R. Bhat**, On the Method of Maximum-Likelihood for Dependent Observations, *J. R. Statist. Soc. B.* 36, 48-53.
7. **A. M. Bloch**, Identification and Estimation of Dynamic Errors-In- Variables Models, *Journal of Econometrics* 41 (1989), 145-158. North- Holland.
8. **Boutayeb, M.** Identification of Nonlinear Systems in the Presence of Unknown but Bounded Disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 8, pags. 1503-1507, August 2000.
9. **Brillinger, D. R., Rosenblatt, M.** Asymptotic theory of estimates of k-th order spectra, in *Spectral analysis of time series*, B. Harris, ed. New York: Wiley, 1967, pp. 153-188.
10. **Brillinger, D. R.** Time series data Analysis and Theory. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975.
11. **Chen, Han-Fu; Guo, Lei.** Identification and Stochastic Adaptive Control, *Systems and Control: Foundations and Applications*, Birkhäuser, 1991.
12. **Cramér, H.** Mathematical methods of statistics. Princenton University Press, Princenton, N. J. 1946.
13. **M. J. Crowder**, Maximum-Likelihood Estimation for Dependent Observations, *Journal of the Royal Statistical Society*, B. 38, 45-53.

14. **Deisler, M.** Linear errors-in-variables models. Time Series and Linear Systems (Lecture notes in Control and Information Sciences) S. Bittanti, Ed. vol. 86. Berlin Spring Verlag, 1986, pp 37-86.
15. **Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B.** Maximum likelihood from incomplete data via de EM algorithm. J. Royal Statistical Soc. Vol. 6, pp. 1-38, 1977.
16. **Fisher, R. A.** On an absolute criterion for fitting frequency curves. Mess. Math, 1912, 41-155.
17. **Fisher, F. M.** The Identification problem in Econometrics, New York, McGraw Hill Book Co., 1966.
18. **Gardner, W.** Identification of systems with cyclostationary input and correlated input/output measurement noise. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 4, pags. 449-453, April 1990.
19. **Ghosh, D.** Maximum Likelihood estimation of the dynamic shock-error model, Journal of Econometrics 41 (1989), 121-143. North-Holland.
20. **Gu, G.** Modeling of Normalized Coprime Factors with v-Metric Uncertainty. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 8, pags. 1498-1511, August 1999.
21. **Hinich, M. J., Wilson, G. R.,** Time delay estimation using the cross bispectrum. IEEE Trans. Sig. Proc., vol. 40, pp 106-113, Jan. 1992.
22. **Vikram Krishnamurthy,** On-Line Estimation of Dinamic Shock-Error Models based on the Kullback Liebler information Measure, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39No. 5, May 1994.
23. **Ljung, Lennart.** System Identification, Theory for the user. 2nd edition. Prentice Hall Ptr 1999.
24. **Jonathan H. Manton, Vikram Krishnamurthy.** James-Stein State Filtering Algorithms. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 46, No. 9, pags. 2431-2447, September 1998.
25. **A. Maravall,** Identification in Dynamic Shock-Error Models, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, 1979.
26. **Min-Shin Chen, Jia-Yush Yen.** Application of the Least Squares Algorithm to the Observer Design for Linear Time-Varying Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 9, pags.1742-1745 September 1999.
27. **Ramirez-López, R., Salas-Zúñiga, R.,** Identificación de Sistemas con Ruido en Mediciones. Memorias de la 5a. Conferencia de Ingeniería Eléctrica, Cinvestav-IPN, México, 1999.
28. **Ramirez-López, R., Salas-Zúñiga, R.,** Identificación bajo incertidumbres del modelo de un sistema combustor de biomasa, Memorias de ELECTRO 2000, pagina 169, XXII Congreso Internacional de Ingeniería Electrónica, Inst. Tecn. de Chihuahua, México, 2000.
29. **Ramírez, R., Aguado, A.** Predictor de Smith Generalizado. Ingeniería Electrónica, No. 3, Vol. XXII, 2001. ISSN 0258-5944.
30. **Ramírez, R., Aguado, A.** Control of a Biomass Combustor using the General Smith Predictor. Journal of Applied Research and Technology. Vol. 1. No. 1, 2003.
31. **Rosenblatt, M.** Stationary sequences and random fields. Boston: Birkhäuser, 1985.
32. **Royden, H.** Real Analysis. Prentice Hall; 3rd edition (February 2, 1988)
33. **Shiryaev, A. N.** Probability. Graduate Text in Mathematics 95, Springer, 1996
34. **S. D. Silvey,** A Note on Maximum-Likelihood in the case of Dependent Random Variables, J. R. Statist. Soc. B. 23, 444-452.
35. **P. Stoica, B. Friedlander, T. Söderström,** High- Order Yule Walker Estimation of the Parameters of Autorregressions from Noise Meassure- ments.
36. **D. M. Titterington,** Recursive Parameter Estimation using Incomplete Data, J. R. Statist. Soc. B. 46 No. 2, 257-267. 1984.
37. **J. K. Tugnait, Y. Ye,** Stochastic System Identification with Noisy Input-Output Measurements using Polyspectra, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 4, April 1995.
38. **Vasilis Tsoulkas, Panos Koukoulas, and Nicholas Kalouptsidis.** Identification of Input-Output Bilinear Systems Using Cumulants. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 49, No. 11, pags. 2753-2761, November 2001.
39. **Vandersteen, G., Rolain, Y., Schoukens, J.** On the use of System Identification for accurate parametric modeling of nonlinear system using noisy measurements. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 45, No. 2, pags. 605-609, April 1996.

40. **Wald, A.** Note on the consistency of the maximum likelihood estimate. *Anti. Math. Statistics*, 1949, 20:595-601.
41. **Weinstein, E.** Sequential algorithms for parameter estimation based on the Kullback-Liebler Information measure. *IEEE trans. Acoustic, Speech, Sig. Proc.* vol. 38, #9, Sept. 1990.
42. **Wilson, S. S., Carnal, C. L.,** *System Identification with Disturbances.* IEEE, 1994.



**Roberto Salas Zúñiga.** *Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control Automático en el CINVESTAV del IPN. De 1997 a 2000, profesor de tiempo completo del Departamento de Electrónica y Sistemas Computacionales del ITESM Campus Querétaro. De 1997 a 2000, profesor de las Maestrías de Control e Instrumentación y de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro. En el 2000, profesor del Postgrado Interinstitucional en Ciencia y Tecnología CIDESI- PICyT. De 1999 a 2001, Investigador Residente del Postgrado de Tecnología Avanzada del CICATA – IPN. Fundador y director de MIDE, Metrología Integral y Desarrollo, S. A. de C. V.*



**Raúl Ramírez López.** *Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica, en el IPN, México; Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, México; Doctorado en Ingeniería con especialidad en Instrumentación y Mecatrónica (candidato), Universidad Autónoma de Querétaro; Investigador en el Centro de Tecnología Avanzada, CIATEQ, Querétaro; Profesor de Tiempo Completo de la Universidad Autónoma Metropolitana, de la Universidad Tecnológica de Querétaro y actualmente del Instituto Tecnológico de Querétaro; Profesor de tiempo parcial de ESIME-IPN, del ITESM, campus Querétaro y de la División de Estudios de Postgrado de la Universidad Autónoma de Querétaro.*