

Cálculo de la Incertidumbre en la Medición Visual de los Parámetros de un Péndulo de Foucault

Uncertainty Calculation on the Visual Measurements of the Parameters of a Foucault Pendulum

Pablo Vera Alfaro y Joaquín Salas Rodríguez

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Unidad Querétaro
Cerro Blanco Núm. 141, Col. Colinas del Cimatarío, Querétaro, Qro. C. P. 76090
pvera@ipn.mx, jsalasr@ipn.mx

Artículo recibido en Noviembre 06, 2007; aceptado en Febrero 04, 2008

Resumen

Se presenta un método para la determinación de la incertidumbre en la medición de los parámetros que describen la dinámica de un péndulo de Foucault. Primero revisamos como se pueden obtener estos parámetros. Luego, proponemos un método para la evaluación de la incertidumbre en su determinación. Ilustramos el método con experimentación realizada sobre un péndulo de 28m de altura ubicado a 20° 35' de latitud norte.

Palabras clave: Péndulo de Foucault, Incertidumbre, Calibración de Cámaras, Visión por Computadora.

Abstract

We present a method for determining the uncertainty in the measurement of parameters that describe the dynamics of a Foucault's pendulum. In the document, we review how these parameters can be obtained. Then, we propose a method for evaluating the uncertainty in their determination. We illustrate the method with experimentation made on a 28m height pendulum located at 20° 35' north latitude.

Keywords: Foucault Pendulum, Uncertainty, Camera Calibration, Computer Vision.

1 Introducción

El péndulo de Foucault es un dispositivo introducido en 1851 por Jean Bernard León Foucault [12] para demostrar la rotación de la Tierra sin apelar a algún elemento extraterrestre. Típicamente consta de una esfera sostenida por un cable o un alambre a un punto fijo que se encuentra a una cierta altura (regularmente la altura varía entre 3 y 30 metros). El principio del péndulo consiste en que, cuando es libre de oscilar y la esfera o el cable no reciben un impulso lateral, el plano inicial de oscilación se mantiene por tiempo indefinido, o hasta que el péndulo se detiene, de tal manera que el cambio de orientación observado relativo a la superficie, se debe al movimiento de la Tierra. La rapidez con la que ocurre este cambio de orientación es proporcional al seno de la latitud donde el péndulo esté instalado. En el Polo Norte o en el Polo Sur se observaría la máxima rapidez, que es de una vuelta completa en un día sideral, mientras que en el ecuador no se observaría ningún cambio de orientación. En la ciudad de Querétaro, México, lugar donde se realizó la experimentación descrita en este artículo, con una latitud de 20° 35' N, el plano de oscilación del péndulo debe rotar los 360° en aproximadamente 68 horas, lo que equivale a una velocidad angular de un poco más de 5° por hora. Con objeto de caracterizar el movimiento del péndulo de Foucault, Salas *et. al.* [9] describieron un método, basado en el uso de un sistema de visión por computadora, para medir, en tiempo real, los parámetros que describen la cinemática del péndulo, tales como la orientación del plano de oscilación, la elipticidad de la oscilación, y la longitud del semieje mayor. En este trabajo se presenta un método para la determinación de la incertidumbre en el cálculo de esos parámetros.

El uso de visión artificial como una herramienta de medición exige la determinación de la incertidumbre. Esto permite, entre otras cosas, evaluar los diferentes métodos, dar una base sobre la cual minimizar errores, o permitir el ajuste de un modelo a datos de entrada con ruido. Estos problemas se presentan con frecuencia en temas tales como la reconstrucción en 3D, calibración de cámaras, la detección y el seguimiento de objeto y otros. Por ello, diversas metodologías han sido desarrolladas. Por ejemplo, Steele y Jaynes [11] consideran el caso de la localización de esquinas y usan un modelo de ruido en los píxeles para derivar una estimación de la incertidumbre en la posición.

Por otro lado, Nickels y Hutchinson [6] estudian medidas de incertidumbre en el seguimiento de características en secuencias de imágenes, ponderando la influencia de cada característica de acuerdo a su incertidumbre asociada. Igualmente, Kanatani [5] estudia las consideraciones que se deben hacer al usar métodos estadísticos para inferir propiedades geométricas a partir de puntos característicos extraídos en imágenes. La incertidumbre en la calibración de cámaras se manifiesta en el grado de concordancia entre las coordenadas de los puntos de referencia que se observan en las imágenes y las coordenadas calculadas de acuerdo al modelo de la cámara. En el caso de Shih *et. al.* [10], ellos utilizan el error vinculado a la separación entre estas coordenadas para valorar la exactitud de la calibración de cámaras para aplicaciones de visión en 3D. En nuestro trabajo, proponemos integrar el modelo matemático de representación del problema bajo análisis con las medidas extraídas por el sistema de visión, propagando la incertidumbre desde la calibración del sistema hasta la expresión del resultado mediante una simulación que utiliza el método de Monte Carlo.

La exposición de nuestro método continúa como sigue. En la sección 2 examinamos el método de calibración usado. Luego revisamos la forma en que se miden los principales parámetros del péndulo. Enseguida, detallamos el método para la determinación de la incertidumbre en la sección 3. El método propuesto fue probado con un péndulo de Foucault ubicado en la ciudad de Querétaro, México. Los resultados se muestran en la sección 4. Finalmente, discutimos los resultados obtenidos y finalizamos el documento.

2 Modelo de Medición de los Parámetros

En Salas *et. al.* [9] se presenta un método para la determinación, mediante un sistema de visión artificial, de los parámetros importantes que describen la trayectoria de un péndulo de Foucault. En esta sección complementamos ese trabajo estableciendo un modelo en el cual la incertidumbre se propaga desde la calibración de la cámara hasta la medición de los parámetros.

2.1 Calibración de la Cámara

La calibración consiste en la obtención de los parámetros intrínsecos y extrínsecos de un modelo de funcionamiento de la cámara que obtiene las imágenes. Para nuestro trabajo utilizamos el método de calibración propuesto por Zhang [13] el cual requiere que la cámara observe un patrón tipo tablero de ajedrez en diferentes posiciones no coplanares. Los parámetros intrínsecos relacionan la posición de un punto en el sistema de referencia de la cámara con la posición, dada en píxeles, de su proyección en la imagen. Los parámetros extrínsecos relacionan los sistemas de coordenadas de la escena y de la cámara. Estas relaciones se establecen mediante transformaciones lineales. En la práctica, la lente de la cámara introduce ciertos tipos de distorsión, que hacen que la relación entre la posición de un punto en la escena y la posición del punto correspondiente en la imagen esté dada por una transformación no lineal. Por este motivo se introducen, posteriormente, coeficientes de distorsión de la lente, para refinar la calibración.

Un punto $(x_c, y_c, z_c)^T$ en el sistema de referencia de la cámara tiene su proyección en el punto $(u, v)^T$ en la imagen. La relación entre ambos está dada por $s(u \ v \ 1)^T = \mathbf{A}(x_c \ y_c \ z_c)^T$, donde s es un factor de escala y

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_u & \gamma & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de parámetros intrínsecos, y f_u y f_v son las longitudes focales en píxeles, tomando el

tamaño del píxel en la dirección de las abscisas y de las ordenadas, respectivamente, $(u_0, v_0)^T$ es el centro de la imagen y γ es un factor que describe la oblicuidad de los ejes de la imagen.

La transformación del punto $(x_w, y_w, z_w)^T$ en coordenadas de la escena a coordenadas de la cámara se realiza mediante un matriz de rotación, \mathbf{R} , y un vector de traslación, \mathbf{t} , tal que $(x_c \ y_c \ z_c)^T = \mathbf{R}(x_w \ y_w \ z_w)^T + \mathbf{t}$.

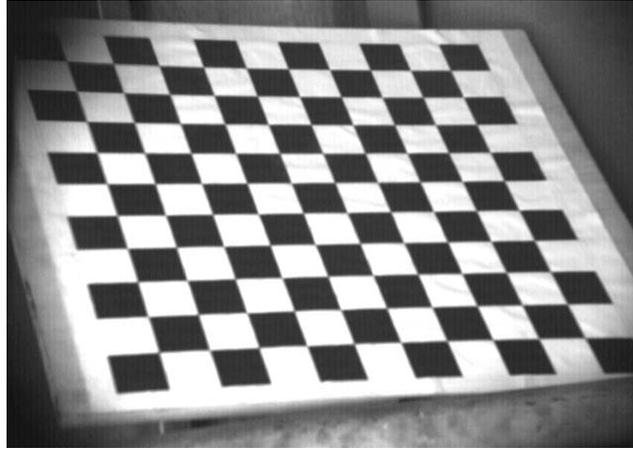


Fig. 1. Patrón usado en la calibración

Por otro lado, la distorsión radial de la lente se corrige mediante dos coeficientes, k_1 y k_2 , utilizando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u + (u - u_0) \left[k_1(x^2 + y^2) + k_2(x^2 + y^2)^2 \right], \\ \tilde{v} &= v + (v - v_0) \left[k_1(x^2 + y^2) + k_2(x^2 + y^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (1)$$

donde $(u, v)^T$ son las coordenadas ideales (sin distorsión) y $(\tilde{u}, \tilde{v})^T$ son las coordenadas reales, $(x, y)^T$ son las coordenadas del punto normalizadas, y $x = x_c/z_c$ y $y = y_c/z_c$.

En [13] se describe el método para determinar estos parámetros a partir de los puntos de referencia, o esquinas de los cuadros en el patrón, tomando varias imágenes de éste con diferentes orientaciones. Estos puntos se pueden extraer de las imágenes utilizando, por ejemplo, el detector de Harris y Stephens [4]. En nuestro trabajo complementamos el método de Zhang al introducir el cálculo de la incertidumbre en la determinación de los parámetros de la cámara. Partimos del hecho de que existen errores en la extracción de las coordenadas de las esquinas, los cuales, junto con el modelo mismo de la cámara, generan *errores de proyección* (algunos autores, como Chen *et. al.* [2], usan el término *error de proyección* para referirse a la distancia en píxeles entre la posición de un punto proyectado utilizando los parámetros de la cámara y la del punto correspondiente que se observa en la imagen). Debido a los errores en las coordenadas de las esquinas y al modelo de la cámara, se tiene una incertidumbre en los parámetros intrínsecos y extrínsecos después de la calibración. Para valorar esta incertidumbre, proponemos un método que consiste en realizar varias veces la calibración de la cámara utilizando el método de Zhang, pero en cada una, usando un conjunto diferente de datos de entrada sintéticos que simulen la incertidumbre de los datos reales. Las desviaciones que se obtienen en los resultados representan la incertidumbre que se tiene en ellos.

2.2 Los Parámetros del Péndulo

En Salas *et. al.* [9] se aprovecha que el péndulo, visto desde su vértice, describe una trayectoria que se puede aproximar a una elipse durante un periodo corto, tal como el de una oscilación, para determinar los parámetros importantes que describen el funcionamiento de un péndulo de Foucault. Los parámetros que se midieron fueron la orientación del semieje mayor, θ , la longitud del semieje mayor, α y la elipticidad, ε , definiendo ésta como el cociente entre el semieje menor y el semieje mayor.

La detección del movimiento de la esfera se realiza por medio de sustracción de fondo. Esta es una técnica comúnmente empleada para detectar objetos en movimiento en una secuencia de imágenes tomadas por una cámara sin movimiento. Primero, se toman dos imágenes consecutivas, I_k e I_{k-1} , de la secuencia de imágenes. El ruido en las imágenes es atenuado usando un filtro Gaussiano obteniendo dos imágenes suavizadas, S_k y S_{k-1} , a partir de las cuales se obtiene una imagen de diferencias dada por $D_k = S_k - S_{k-1}$ (Figura 2a). En la imagen D_k , los píxeles que corresponden al fondo estático tendrían un valor de intensidad igual o cercano a cero, mientras que el resto de los píxeles corresponden a objetos en movimiento, principalmente la esfera del péndulo y el cable de suspensión, o bien a partes de la escena donde hayan cambios repentinos de iluminación, sombras proyectadas por la esfera, etc. Luego, los bordes son detectados mediante el operador de Canny [1] obteniéndose la imagen de contornos de los objetos D_k (Figura 2b). La detección de la esfera del péndulo se realiza haciendo la convolución de la imagen de contornos con una función especial de dos dimensiones, con valor de 1 para los puntos que se encuentran entre dos circunferencias concéntricas y 0 para los demás puntos (Figura 2c). Una de las circunferencias es ligeramente mayor a la imagen de la esfera y la otra es ligeramente menor, de manera que el resultado de la operación de convolución da un máximo en la posición de la esfera del péndulo (Figura 2d). Debido a que se puede predecir el movimiento del péndulo después de pocas detecciones, se define una región de interés para realizar la siguiente detección con objeto de acelerar el procesamiento y eliminar falsos positivos. La nueva detección se usa para actualizar esta región.

Para determinar la posición del péndulo en la escena, primeramente se utiliza la ecuación

$$s \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde s es un factor de escala arbitrario, \mathbf{A} es la matriz de parámetros intrínsecos, $\mathbf{Q} = (\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t})$, donde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son la primera y segunda columnas, respectivamente, de la matriz de rotación \mathbf{R} . Por su parte, $(u, v)^T$ son las coordenadas ideales que se calculan a partir de las coordenadas reales $(\tilde{u}, \tilde{v})^T$ de la posición detectada del péndulo en la imagen, usando los coeficientes de distorsión k_1 y k_2 . De esta forma se obtienen las coordenadas $(x_w, y_w, 0)^T$ de un punto ubicado en el lugar donde se colocó el patrón. La recta que une este punto con el centro de proyección de la cámara pasa por la posición de la esfera del péndulo, pero ésta se encuentra en una posición con $z_w \neq 0$, como se muestra en la Figura 3.

Las coordenadas del centro de la esfera del péndulo se pueden denotar como $(x'_w, y'_w, z'_w)^T$ y se tienen las relaciones

$$\frac{x'_w}{l+h-z'_w} = \frac{x_w}{l+h}, \quad \frac{y'_w}{l+h-z'_w} = \frac{y_w}{l+h}, \quad (3)$$

donde l es la longitud del cable de suspensión del péndulo más el radio de la esfera y h es la altura de la esfera en su posición más baja. En la Figura 3 se tiene $r = \sqrt{x_w^2 + y_w^2}$ y se llega a

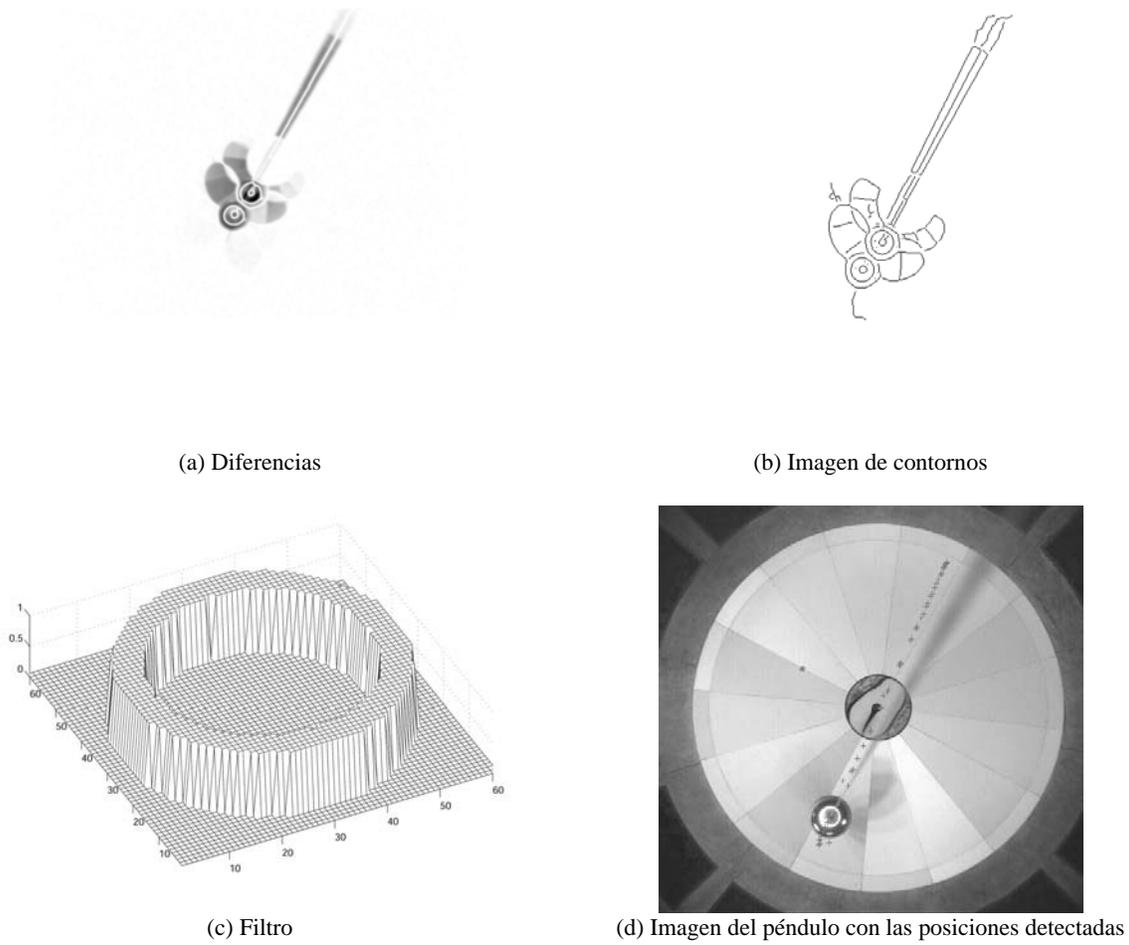


Fig. 2. Proceso de análisis de imágenes en la detección de la esfera del péndulo

$$x'_w = \frac{l}{\sqrt{(l+h)^2 + x_w^2 + y_w^2}} x_w, \quad y'_w = \frac{l}{\sqrt{(l+h)^2 + x_w^2 + y_w^2}} y_w, \quad z'_w = l+h - \frac{l(l+h)}{\sqrt{(l+h)^2 + x_w^2 + y_w^2}}. \quad (4)$$

La cámara debe colocarse cerca del punto de suspensión del péndulo, de manera que el valor $l+h$ se pueda aproximar a la distancia entre el centro de proyección de la cámara y el origen del sistema de coordenadas de la escena (esta distancia es igual a la norma del vector de traslación). Este origen corresponde al punto de intersección de la línea vertical que pasa por el punto de suspensión con el plano $Z_w=0$.

Los puntos calculados, para cada oscilación completa, se ajustaron a una elipse por medio del algoritmo de Halír y Flusser [3]. Una elipse es un caso especial de una cónica, la cual puede describirse mediante la ecuación

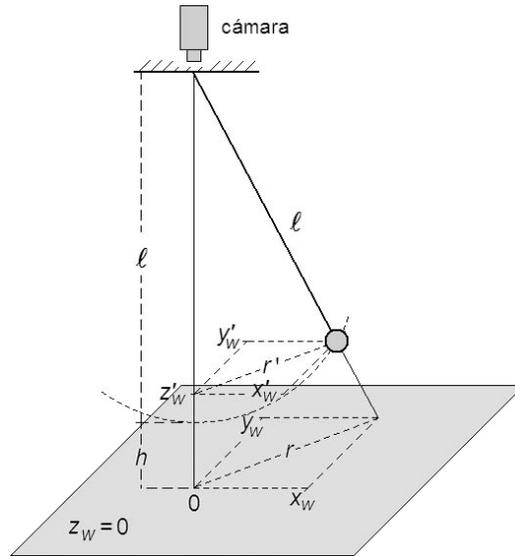


Fig. 3. El movimiento del péndulo es sobre una superficie diferente al plano $Z_w=0$

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (5)$$

donde, para el caso de la elipse, se tiene la restricción $b^2 - 4ac < 0$. Los parámetros del péndulo se obtienen a partir de las ecuaciones

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b}{a-c} \right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{ah^2 + ck^2 + bhk - f}{a + \frac{1}{2}btg\theta}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{ah^2 + ck^2 + bhk - f}{a - \frac{1}{2}b \cot \theta}}, \quad \varepsilon = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (6)$$

donde β es la longitud del semieje menor. Las coordenadas $(h, k)^T$ corresponden al centro de la elipse y se obtienen a partir de

$$h = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2}, \quad k = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2}. \quad (7)$$

El ángulo de orientación se puede restringir al intervalo $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$. En este intervalo se tienen, en principio, dos soluciones para θ , pero sólo una satisface la condición de que α es mayor que β . Para $a=c$ se tiene $\theta=45^\circ$ o $\theta=135^\circ$, dependiendo de la condición mencionada y para $a + \frac{1}{2}btg\theta = 0$ se tiene $\varepsilon=0$. Se tiene que

$abs\left(a - \frac{1}{2}b \cot \theta\right) > abs\left(a + \frac{1}{2}btg\theta\right)$ dado que, en caso contrario, se tendría $\varepsilon \geq 1$ y $\beta \geq \alpha$, esta condición implica que $a - \frac{1}{2}b \cot \theta \neq 0$, lo cual se satisface para al menos una de las soluciones de θ .

En la ecuación (6) se observa que no siempre se obtienen valores reales para α y β (para toda $\{a, b, c, d, e, f\} \in \text{Re}$). De (5) se tiene $y = \frac{-bx - e \pm \sqrt{(bx + e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$, de donde se desprende que para obtener valores de $y \in \text{Re}$ se debe satisfacer la condición $(bx + e)^2 \geq 4c(ax^2 + dx + f)$. Esta inecuación se satisface, para al menos un valor de $x \in \text{Re}$, sólo cuando $(2cd - be)^2 \geq (4ac - b^2)(4cf - e^2)$, tomando en cuenta que $4ac - b^2 > 0$. El ajuste de puntos reales a elipses implica que se obtienen coeficientes que satisfacen esta condición y para los cuales se obtienen valores reales de α y β .

3 Cálculo de la Incertidumbre

En general, el resultado de una medición es solamente una aproximación o estimación del valor de la cantidad específica sujeta a medición, llamada mensurando. Así, la expresión de este resultado es completa sólo cuando va acompañado por una medida cuantitativa de su incertidumbre. La incertidumbre se expresa mediante el intervalo de valores que puede contener, muy probablemente, al valor verdadero. La incertidumbre se puede asociar a una distribución de probabilidad. En muchas mediciones no se puede llegar a conocer el valor verdadero de una magnitud, pero se puede estimar una probabilidad para cada valor posible y se reporta como valor convencionalmente verdadero al valor más probable. La incertidumbre es el valor que, cuando se resta o se suma al valor más probable, define un intervalo dentro del cual hay una probabilidad dada de encontrar al valor verdadero que es igual a un nivel de confianza establecido. Normalmente, la distribución de probabilidad del resultado de una medición se modela utilizando una función conocida, tal como la distribución normal de probabilidad. La importancia de ésta radica en el hecho de que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales y a errores cometidos al medir ciertas magnitudes cuyo estudio se puede simplificar al ajustar su comportamiento a este tipo de distribución. La distribución normal presenta la ventaja adicional de que se define únicamente con la media y la desviación estándar. Una incertidumbre igual a la desviación estándar (1σ) tiene un nivel de confianza del 68% aproximadamente y, para una incertidumbre igual al doble de la desviación estándar (2σ), del 95% aproximadamente.

Primeramente, se calculó la incertidumbre de los parámetros de la cámara. Se consideró que las principales fuentes de incertidumbre eran: a) La exactitud en la extracción de las coordenadas de los puntos de referencia en las imágenes del patrón, b) La uniformidad en la posición de los puntos de referencia en el patrón, y c) El método mismo debido a las discrepancias entre el modelo pinhole y la cámara real y a que los coeficientes de distorsión radial no cubren totalmente estas discrepancias. Estas fuentes de incertidumbre son las que provocan los errores de proyección mencionados anteriormente. Se utilizó el método de Monte Carlo [8], por ser muy conveniente de aplicarlo a problemas donde se tiene un conjunto de datos de entrada con una incertidumbre conocida, a partir de los cuales se obtienen los parámetros de salida. El método propone la generación de datos de entrada sintéticos con una distribución similar a la distribución de probabilidad asumida para los datos de entrada reales. Cada conjunto de datos sintéticos genera su propio conjunto de parámetros de salida, de manera que para un cierto número de repeticiones en el cálculo, se puede obtener la incertidumbre de los parámetros a partir de su distribución. Un número grande de repeticiones asegura que la distribución de los datos sintéticos sea muy parecida a la distribución de probabilidad de los datos reales. En el procedimiento para evaluar la incertidumbre de los parámetros de la cámara, sustituimos las coordenadas de cada punto de referencia $(u_i, v_i)^T$ para $i=1, \dots, n$ (donde n es el número de puntos

extraídos en todas las imágenes del patrón) por las coordenadas $(u_i + r_{u,i}, v_i + r_{v,i})^T$ donde $r_{u,i}$ y $r_{v,i}$ son números aleatorios generados por computadora con distribución normal de probabilidad, media de cero y una desviación estándar s_p , que es igual a la incertidumbre estimada a 1σ para las coordenadas de estos puntos. El valor s_p se obtiene a partir de

$$s_p = \text{desv. est.} \{ \hat{u}_1 - u_1, \hat{v}_1 - v_1, \hat{u}_2 - u_2, \hat{v}_2 - v_2, \dots, \hat{u}_n - u_n, \hat{v}_n - v_n \}, \tag{8}$$

donde $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)^T$ son las coordenadas calculadas para el i -ésimo punto, utilizando los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara obtenidos en su calibración. Al efectuar la calibración de la cámara utilizando datos de entrada con ruido se obtiene, para el j -ésimo parámetro p_j , el conjunto de resultados $\{p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jm}\}$ donde m es el número de veces que se repite el algoritmo de calibración y la incertidumbre de p_j (a 1σ) se calcula como

$$u(p_j) = \text{desv. est.} \{ p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jm} \}. \tag{9}$$

Enseguida se calculó la incertidumbre de los parámetros del movimiento del péndulo: θ , α y ε . En la ecuación (2), se sustituyó la matriz Q por Q_r y la matriz A por A_r , donde Q_r y A_r se obtienen al agregar ruido a los parámetros de la cámara. El ruido consistió de números aleatorios generados por computadora con media de cero y desviación estándar igual a la incertidumbre de cada parámetro. De esta manera se obtuvieron las coordenadas modificadas $(x'_{wr}, y'_{wr}, z'_{wr})^T$ para la posición de la esfera usando las ecuaciones (2) y (4). Al agregar ruido de manera independiente en cada posición detectada de la esfera durante una oscilación completa del péndulo y al ajustar estas posiciones a una elipse mediante el método descrito en la sección 2, se obtuvieron parámetros modificados del movimiento del péndulo (θ_r , α_r y ε_r). Este procedimiento se repitió muchas veces, obteniéndose muchos conjuntos de parámetros, a partir de los cuales se determinó la incertidumbre de estos parámetros como

$$u(\theta) = \text{desv. est.} \{ \theta_{r1}, \theta_{r2}, \dots, \theta_{rm} \}, \quad u(\alpha) = \text{desv. est.} \{ \alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rm} \}, \quad u(\varepsilon) = \text{desv. est.} \{ \varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}, \dots, \varepsilon_{rm} \}, \tag{10}$$

donde m es el número de veces que se repite el cálculo de los parámetros. Finalmente, el cálculo se hizo para el resto de las oscilaciones del péndulo, para obtener la incertidumbre en función del tiempo.

4 Resultados Experimentales

El péndulo tiene un mecanismo de impulso paramétrico para contrarrestar el efecto de amortiguamiento debido a las pérdidas por fricción con el aire [7].

Para determinar los parámetros intrínsecos de la cámara se utilizó un patrón de 11×11 cuadros blancos y negros, cada uno de $50mm$ de lado y se colocó frente a la cámara a una distancia de aproximadamente $2m$ en diferentes orientaciones. Se eligieron 6 imágenes y, de cada una de ellas, se extrajeron las coordenadas de los 64 puntos de referencia más cercanos al centro. Los valores de incertidumbre reportados son a 1σ , lo que corresponde a un nivel de confianza de aproximadamente 68%. En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros intrínsecos en píxeles (excepto k_1 y k_2 que son adimensionales).

Tabla 1. Resultados en la medición de los parámetros intrínsecos e incertidumbre obtenida

parámetro	valor medido	Incertidumbre (1σ)
f_u	2264,4	4,24
f_v	2254,6	4,26
γ	-2,9420	1,8225
u_0	334,08	0,630
v_0	230,25	0,771
k_1	1,7895	0,0679
k_2	16,515	5,187

En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos para los parámetros extrínsecos, que son la matriz de rotación \mathbf{R} , y el vector de traslación \mathbf{t} . Para obtener estos parámetros se usó el patrón grande formado por 4×4 rectángulos blancos y negros, cada uno de $70 \times 50\text{cm}$, colocado debajo del péndulo de manera que el punto de referencia central, al cual se le asignó las coordenadas $(0\text{cm}, 0\text{cm})$, estuviera lo más cerca posible de la línea vertical que pasa por el punto de suspensión y definida por el cable cuando el péndulo está en reposo. En la Tabla 3 se muestran los resultados de incertidumbre para estos parámetros.

Tabla2. Resultados obtenidos para los parámetros extrínsecos

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,99559 & 0,067872 & 0,064811 \\ 0,070023 & -0,99705 & -0,031514 \\ 0,062481 & 0,035913 & -0,9974 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -37,219 \\ -34,466 \\ 3077,2 \end{pmatrix}.$$

Tabla 3. Resultado de la incertidumbre para los parámetros extrínsecos.

$$u(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} 0,001756 & 0,002045 & 0,035899 \\ 0,001588 & 0,001031 & 0,035844 \\ 0,035602 & 0,036151 & 0,001855 \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 0,216 \\ 0,183 \\ 4,171 \end{pmatrix}.$$

Las mediciones de los parámetros de movimiento del péndulo (θ , α y ε) se hicieron con el péndulo en operación por varios días de manera ininterrumpida. La intención era observar dos giros completos de 360° del plano de oscilación, para lo cual se requiere, para la latitud de la ciudad de Querétaro, de 136 horas aproximadamente, o 5 días y 16 horas. Así que se planeó un experimento en el que el péndulo se mantuviera operando durante ese tiempo sin interrupción. Los resultados se muestran en las Figuras 4 y 5 para los dos primeros días, en donde también se muestran las incertidumbres obtenidas. Los resultados fueron similares para los 4 días restantes, observándose que el péndulo no opera adecuadamente ya que, a partir del segundo día, el ángulo de orientación del plano de oscilación permaneció fijo, tal como se observa en la Figura 5. Sin embargo, la determinación del valor de los parámetros y la evaluación de la incertidumbre son independientes del desperfecto en el funcionamiento del péndulo. En [7] Pippard menciona que cuando el péndulo comienza oscilando en un plano, las dos principales razones por las cuales su trayectoria se abre posteriormente en una elipse son las corrientes de aire y la anisotropía del péndulo. La primera podría explicar las variaciones en la elipticidad observadas en las Figuras 4 y 5. La incertidumbre promedio, evaluada a 1σ , durante los 6 días fue de $0,121^\circ$ para el ángulo de orientación, $1,11\text{cm}$ (0,62%) para la longitud del semieje mayor y $2,02 \times 10^{-4}$ (0,40%) para la elipticidad.

Conclusión

El método presentado permite cuantificar la certidumbre sobre el valor expresado por el sistema de visión para los parámetros de funcionamiento del péndulo. Esto permite establecer una medida de la calidad de los resultados que se reportan en una medición. Mediante este trabajo se demostró que, en el caso específico del péndulo de Foucault, se puede usar un sistema de análisis de imágenes por computadora para realizar mediciones de manera confiable. Esto es de especial utilidad pues en este caso se requiere hacer observaciones durante mucho tiempo de manera ininterrumpida y procesar una gran cantidad de datos. Para obtener buenos resultados, es muy importante una adecuada calibración de la cámara. El estudio del comportamiento del sistema que se pretende medir, permite realizar un plan adecuado de experimentación e interpretar mejor los resultados.

Durante la experimentación, se detectó un problema con el avance del plano de oscilación del péndulo, ya que no avanzó a partir del segundo día de funcionamiento. En el primer día, la orientación cambió a una tasa de aproximadamente 1° por hora (véase la Figura 4), lo cual es 5 veces menor a la esperada tomando en cuenta la latitud en la que se ubica. Esto resalta la importancia de contar con un sistema de medición que tome en cuenta la incertidumbre en la expresión de los parámetros del péndulo. Las posibles correcciones al sistema podrán ser evaluadas a la luz de un mejor sistema de expresión de los parámetros.

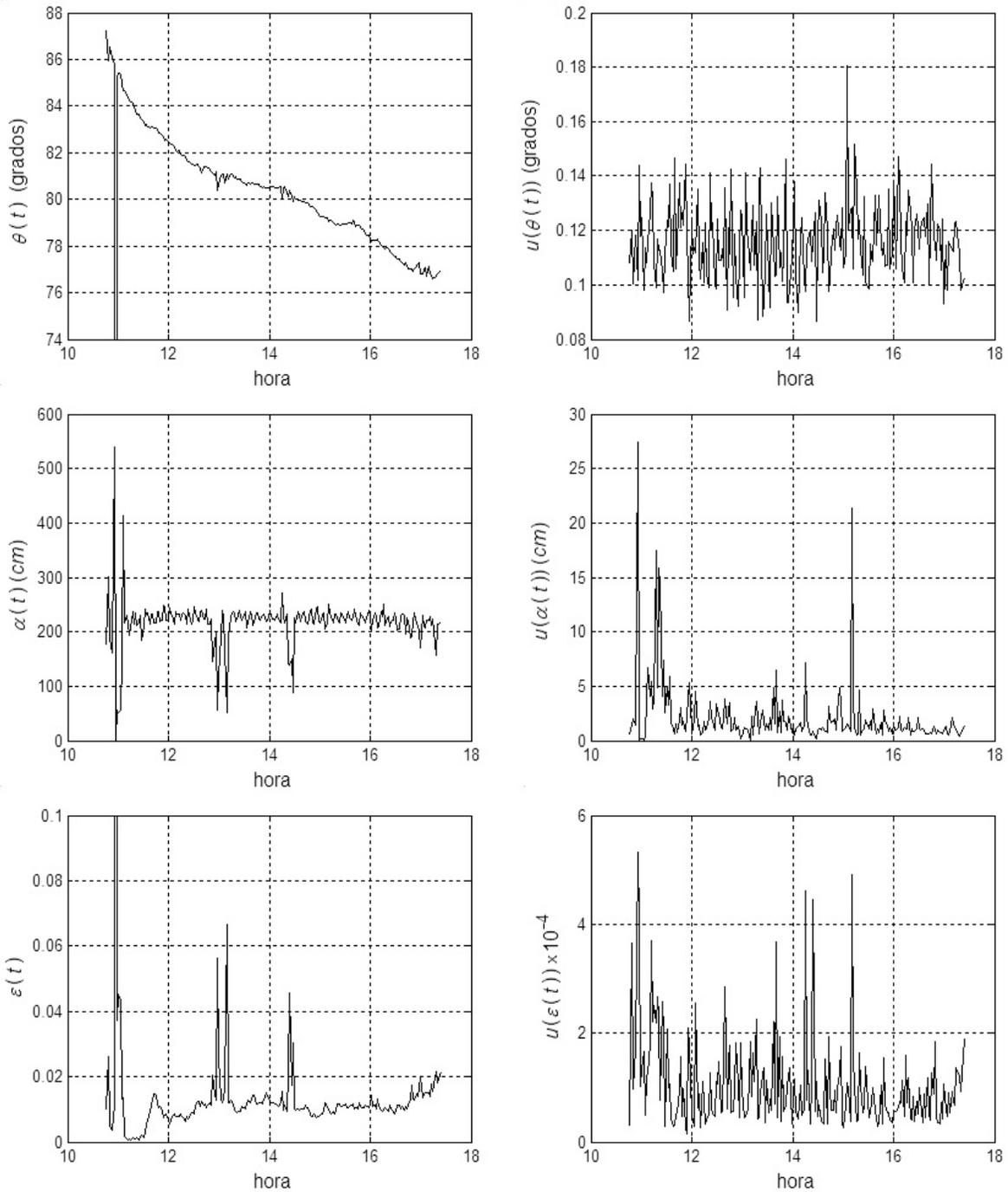


Fig. 4. Parámetros de Movimiento del péndulo para el 1^{er} día. En las imágenes de la izquierda se muestra el ángulo de orientación θ , la longitud del semieje mayor α y la elipticidad ϵ . En las imágenes de la derecha se muestran los valores de incertidumbre estimada a 1σ

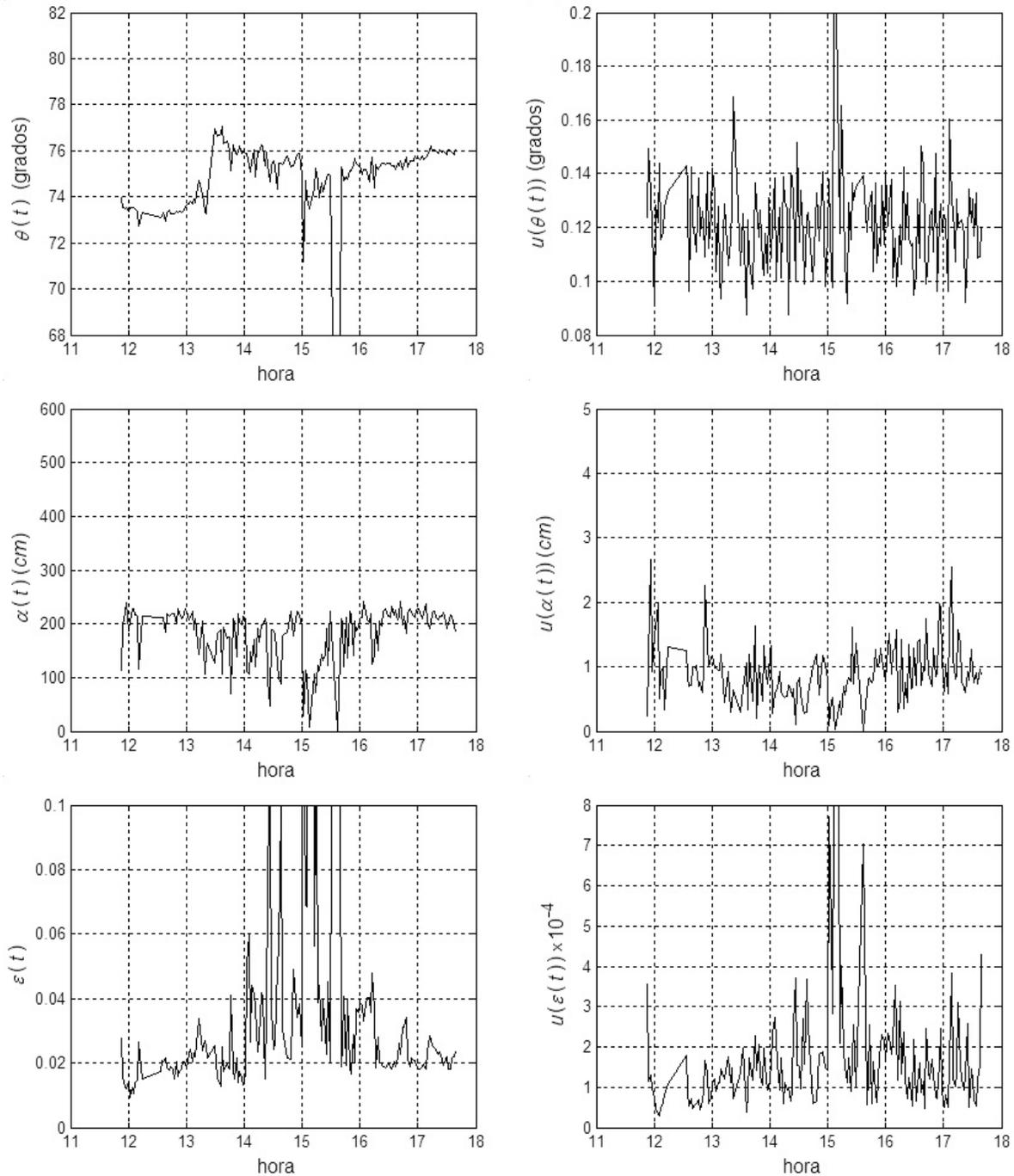


Fig. 5. Parámetros de Movimiento del péndulo para el 2^{do} día. En las imágenes de la izquierda se muestra el ángulo de orientación θ , la longitud del semieje mayor α y la elipticidad ϵ . En las imágenes de la derecha se muestran los valores de incertidumbre estimada a 1σ

Referencias

1. **Canny J.**, “A Computational Approach to Edge Detection”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 8, No. 6, 1986, pp. 679-698.
2. **Chen X., J. Davis y P. Slusallek**, “Wide Area Camera Calibration using Virtual Calibration Objects”, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 2, 2000, pp. 520-527.
3. **Halír R. y J. Flusser**, “Numerically Stable Direct Least Squares Fitting of Ellipses”, *6th International Conference on Computer Graphics and Visualization*, Vol. 1, 1998, pp. 125-132.
4. **Harris C. y M. Stephens**, “A Combined Corner and Edge Detector”, *Proceedings of The Fourth Alvey Vision Conference, Manchester*, 1988, pp. 147-151.
5. **Kanatani K.**, “Uncertainty Modeling and Geometric Inference”, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Okayama University*, Vol. 38, Nos. 1 y 2, 2004, pp. 39-60.
6. **Nickels K. y S. Hutchinson**, “Estimating Uncertainty in SSD-based Feature Tracking”, *Image and Vision Computing*, Vol. 20, 2002, pp. 47-58.
7. **Pippard B.**, “Foucault's Pendulum”, *Royal Institution Proceedings*. Vol. 63, pp. 87-100.
8. **Press W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery**, *Numerical Recipes in C*, 2nd Ed., Cambridge University Press, última edición: 1992, sección 15.6.
9. **Salas J., W. Avalos, R. Castañeda y M. Maya**, “A Machine-Vision System to Measure the Parameters Describing the Performance of a Foucault Pendulum”, *Machine Vision and Applications*, Vol. 17, No. 2, 2006, pp. 133-138.
10. **Shih S., Y. Hung y W. Lin**, “Accuracy Assessment on Camera Calibration Method Not Considering Lens Distortion”, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1992, pp. 755-757.
11. **Steele R. M. y C. Jaynes**, “Feature Uncertainty Arising from Covariant Image Noise”, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 1, 2005, pp. 1063-1070.
12. **Tobin W.**, *The Life and Science of Léon Foucault: The Man who Proved the Earth Rotates*, Cambridge University Press, 2003, capítulo 9.
13. **Zhang Z.**, “A Flexible New Technique for Camera Calibration”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 11, 2000, pp. 1330-1334.



Pablo Vera Alfaro obtained his Master Degree on Advanced Technology (2007) at the Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), and his Bachelor's Degree on Communications and Electronics Engineering at the Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), both belonging to the Instituto Politécnico Nacional (Mexico). His main activities are in the area of computer vision.



Joaquín Salas Rodríguez obtained his doctor degree from ITESM in 1996. Since 1997, he is with the Instituto Politécnico Nacional. He has been visiting scholar at the Universitat Autònoma de Barcelona, PARC (formerly Xerox PARC), Oregon State University, Stanford University, and the Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications at Brest. He has developed image analysis projects for companies including TAMSA, NHUMO, and IFE. He has published 28 papers on journals and international congresses. Since 1995, he is member of the Sistema Nacional de Investigadores.