

Diseño óptimo de transformadores de Hilbert sin multiplicadores con base en el uso de un subfiltro simple

David E. Troncoso Romero, Miriam G. Cruz Jiménez y Gordana Jovanovic Dolecek

Departamento de Electrónica, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Puebla, México

{dtroncoso, miriam_gcj, gordana}@inaoep.mx

Resumen. Los transformadores de Hilbert altamente selectivos pueden ser diseñados eficientemente mediante el método de Transformación en Frecuencia (*Frequency Transformation*, FT), donde un bloque básico, formado con dos subfiltros idénticos, es implementado repetidamente. El número de bloques utilizados se obtiene de la longitud de un filtro prototipo. Recientemente se ha utilizado la técnica Segmentación-Intercalamiento (*Pipelining-Interleaving*, PI) para evitar el uso repetitivo del bloque básico, reduciendo el número de coeficientes requeridos. Sin embargo, el diseño del subfiltro y del filtro prototipo está basado en una búsqueda heurística. En este artículo se presenta el método óptimo para diseñar el subfiltro y el filtro prototipo, minimizando el número de coeficientes. Además, se propone una estructura alternativa que permite utilizar únicamente un subfiltro dentro del bloque básico. Como resultado, el número total de coeficientes es disminuido. Se demuestra con un par de ejemplos que el método de diseño es óptimo, simple y eficiente.

Palabras Clave. Filtros digitales, transformador de Hilbert.

Optimal Design of Multiplierless Hilbert Transformer based on the Use of a Simple Subfilter

Abstract. Very sharp Hilbert transformers can be efficiently designed by using the Frequency Transformation (FT) method, where a basic building block, formed with two identical subfilters, is repeatedly implemented. The number of the building blocks used is obtained from the length of a prototype filter. Recently, the Pipelining-Interleaving (PI) technique has been applied to avoid the repetitive use of the basic building block, reducing the number of required coefficients. However, the design of the subfilter and the prototype filter is based on a heuristic search. In this

paper, we present an optimal method to design the subfilter and prototype filter minimizing the number of coefficients. Additionally, an alternative structure, which permits to use a unique subfilter inside the basic building block, is presented. As a result, the total number of coefficients is decreased. Two examples show that the proposed design method is optimal, simple, and efficient.

Keywords. Digital filters, Hilbert transformer.

1 Introducción

Un transformador de Hilbert es un filtro que introduce un desplazamiento de fase de $\pi/2$ en la señal de entrada. Su respuesta en frecuencia ideal está dada por la siguiente ecuación,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j; & 0 < \omega < \pi, \\ j; & -\pi < \omega < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Este filtro es utilizado en telecomunicaciones, procesamiento de voz e imágenes médicas, entre otros [6, 7, 8].

Los transformadores de Hilbert pueden ser diseñados como filtros con Respuesta al Impulso Infinita (*Infinite Impulse Response*, IIR) o como filtros con Respuesta al Impulso Finita (*Finite Impulse Response*, FIR). Estos últimos pueden tener fase lineal exacta, y su estabilidad está garantizada. Sin embargo, ellos tienen una complejidad computacional más alta en comparación con los filtros IIR para una misma especificación. Esta complejidad aumenta conforme la banda de transición se hace más angosta [1].

Diferentes técnicas han sido propuestas para llevar a cabo el diseño eficiente de transformadores de Hilbert FIR de baja complejidad con banda de transición angosta [2, 5, 6, 7, 8].

Un método efectivo es el basado en un filtro de media banda formado con base en la técnica de Enmascaramiento de Respuesta en Frecuencia (*Frequency-Response Masking*, FRM) [7]. Una modificación a ese método utiliza una nueva estructura basada en FRM, la cual se basa en un subfiltro de corrección de la respuesta en frecuencia [8]. En esa propuesta todos los subfiltros son diseñados simultáneamente bajo el mismo problema de optimización. Por otra parte, se tiene el método basado en el diseño de filtros FIR de banda ancha y fase lineal con una respuesta al impulso Polinomial-Sinusoidal por Segmentos (*Piecewise Polynomial-Sinusoidal*, PPS) [6]. El método de Transformación en Frecuencia (*Frequency Transformation*, FT) [9], fue utilizado para diseñar transformadores de Hilbert FIR con base en la interconexión en cascada de múltiples copias de un bloque básico simple [5]. Este bloque básico es obtenido con la conexión en cascada de dos subfiltros transformadores de Hilbert idénticos de baja complejidad.

Debido a que los multiplicadores son elementos muy caros en un filtro digital, el diseño sin multiplicadores es preferible. Recientemente un método simple y eficiente ha sido propuesto para diseñar transformadores de Hilbert sin multiplicadores con banda de transición muy angosta, con base en el método FT [2]. En esa propuesta la implementación repetida del mismo bloque básico fue evitada empleando la técnica Segmentación-Intercalamiento (*Pipelining-Interleaving*, PI) [3]. Además se utilizó el método de Eliminación de Subexpresiones Comunes (*Common Subexpression Elimination*, CSE) [10] para reducir el número de sumadores en los subfiltros transformadores de Hilbert que componen al bloque básico.

La aplicación de la técnica propuesta por [2] da como resultado transformadores de Hilbert FIR altamente selectivos con un número reducido de sumadores. No obstante, el diseño del subfiltro y del filtro prototipo está basado en una búsqueda heurística, por lo que el resultado no es

óptimo. Adicionalmente, la estructura y el algoritmo de diseño propuestos en ese artículo se basan en la implementación del bloque básico como la conexión en cascada de dos transformadores de Hilbert idénticos de bajo orden. Si bien esto permite que el aumento de la frecuencia de reloj de los transformadores de Hilbert que conforman dicho bloque no sea demasiado alto, el número total de sumadores requeridos en el diseño no es completamente reducido. Esto provoca que el filtro ocupe más espacio y más recursos de hardware.

En este artículo se presentan dos contribuciones que permiten una mayor reducción en el número de coeficientes requeridos. En primer lugar, se presenta el método óptimo para diseñar el subfiltro y el filtro prototipo, de tal manera que el número de coeficientes sea minimizado. En segundo lugar, se propone modificar la estructura presentada por [2], utilizando la técnica PI no solamente en la interconexión de bloques básicos sino también dentro del propio bloque, de tal manera que se pueda evitar el uso repetido de los dos subfiltros transformadores de Hilbert que lo forman. Como resultado, se obtiene una reducción adicional en el número total de coeficientes.

La organización de este artículo es como sigue. La Sección 2 presenta la explicación del método de Transformación en Frecuencia. El método de diseño propuesto es detallado en la Sección 3. Por último, la discusión de resultados es presentada en la Sección 4.

2 El método de transformación en frecuencia

El método de Transformación en Frecuencia de [5] permite diseñar un transformador de Hilbert con rizados muy pequeños y banda de transición muy angosta utilizando repetidamente un subfiltro simple. El número de veces que este subfiltro es utilizado está en función de la longitud de un filtro prototipo. Ambos, el subfiltro y el filtro prototipo, son transformadores de Hilbert FIR basados en filtros Tipo-III y Tipo-IV. Un filtro Tipo-III tiene respuesta al impulso antisimétrica y su longitud debe ser impar. Similarmente, un filtro Tipo-IV

también tiene antisimetría en su respuesta al impulso, pero su longitud es siempre par.

El filtro prototipo debe ser un filtro FIR Tipo-IV, es decir, con longitud par dada como $L_P = 2N$ y respuesta al impulso antisimétrica de la forma $p(2N - 1 - n) = -p(n)$. Su respuesta en frecuencia está expresada como

$$P(e^{j\Omega}) = e^{-j((2N-1)\Omega/2)} P_0(\Omega) \quad (2)$$

donde $P_0(\Omega)$, el término de fase-cero, está dado por

$$P_0(\Omega) = j \cdot \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{d}(n) \cos(\Omega n) \quad (3)$$

con Ω denotando el dominio de frecuencias del filtro prototipo. Los coeficientes $\tilde{d}(n)$ pueden ser obtenidos de la respuesta al impulso $p(n)$ [1].

Consideremos la equivalencia $\cos(\Omega n) = T_n\{\cos(\Omega)\}$ [9], con $T_n\{x\}$ siendo el polinomio de Chebyshev de n -ésimo grado.

El término de fase-cero puede entonces ser reescrito como

$$P_0(\Omega) = j \cdot \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n) [\cos(\Omega)]^n \quad (4)$$

donde los coeficientes $\alpha(n)$ están relacionados con los coeficientes $\tilde{d}(n)$ a través de los polinomios de Chebyshev. Con base en la siguiente equivalencia

$$\cos(2x) = 1 - \sin^2(x) = 1 + (j \cdot \sin x)^2 \quad (5)$$

el término de fase-cero puede ser expresado por

$$P_0(\Omega) = j \cdot \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n) \left[1 + \left(j \cdot \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)^2\right]^n \quad (6)$$

El subfiltro puede ser un filtro Tipo-III o Tipo-IV. Consideremos el caso de un filtro Tipo-III, con longitud impar dada como $L_G = 2M + 1$ y respuesta al impulso antisimétrica de la forma $g(2M - n) = -g(n)$. Su respuesta en frecuencia está expresada como

$$G(e^{j\omega}) = e^{-j(2M\omega/2)} G_0(\omega) \quad (7)$$

donde $G_0(\omega)$ es el término de fase-cero, dado por

$$G_0(\omega) = j \cdot \sum_{n=1}^M c(n) \sin(\omega n) \quad (8)$$

Los coeficientes $c(n)$ pueden ser obtenidos a partir de $g(n)$ [1]. Obsérvese que el término $G_0(\omega)$ puede ser puesto en (6) mediante la sustitución dada por la siguiente expresión,

$$j \cdot \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) = j \cdot \sum_{n=1}^M c(n) \sin(\omega n) \quad (9)$$

resultando en

$$H_0(\omega) = j \cdot \sum_{n=1}^M c(n) \sin(\omega n) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n) \left[1 + 2 \left(j \cdot \sum_{n=1}^M c(n) \sin(\omega n)\right)\right]^n \quad (10)$$

donde $H_0(\omega)$ es el término de fase-cero del filtro total. Por lo tanto, la transformación en frecuencia se obtiene de (9) y está dada por

$$\Omega = 2 \sin^{-1} \left[\sum_{n=1}^M c(n) \sin(\omega n) \right] \quad (11)$$

La ecuación (11) implica que la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro prototipo se preserva, pero su dominio de frecuencias es cambiado por el subfiltro.

La función de transferencia del transformador de Hilbert total, está dada como

$$H(z) = z^{-M(2N-1)} H_0(z) \quad (12)$$

donde

$$H_0(z) = G(z) \sum_{n=0}^{N-1} z^{-2M(N-1-n)} \alpha(n) [H_1(z)]^n \quad (13a)$$

$$H_1(z) = z^{-2M} + 2G^2(z), \quad (13b)$$

con $G(z)$ siendo la función de transferencia del subfiltro.

Consideremos la especificación del transformador de Hilbert deseado dada su respuesta en frecuencia de la siguiente manera,

$$(1-\delta) \leq |H_0(\omega)| \leq (1+\delta), \quad \text{para } \omega_L \leq \omega \leq \pi - \omega_L \quad (14)$$

donde ω_L es la frecuencia límite inferior de la banda de paso y δ es el rizo permitido. Entonces el filtro prototipo debe cumplir la especificación dada en términos de la frecuencia transformada por

$$(1-\delta) \leq |P_0(\Omega)| \leq (1+\delta), \quad \text{para } \Omega_L \leq \Omega \leq \pi \quad (15)$$

con Ω_L siendo la frecuencia límite inferior del filtro prototipo. El subfiltro debe cumplir simultáneamente la especificación dada por

$$v_d - \delta_d \leq |G_0(\omega)| \leq 1, \quad \text{para } \omega_L \leq \omega \leq \pi - \omega_L \quad (16a)$$

$$v_d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\Omega_L}{2}\right), \quad (16b)$$

$$\delta_d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\Omega_L}{2}\right). \quad (16c)$$

Nótese que para poder diseñar ambos, el filtro prototipo y el subfiltro, es necesario determinar el valor Ω_L . La Figura 1 presenta una estructura eficiente [2], donde el uso repetitivo del bloque básico $H_1(z)$, dado en (13b), se evitó con base en la técnica PI. El número de coeficientes requeridos se redujo, ya que el bloque básico se implementa una sola vez en forma expandida, $H_1(z^K)$. K es el factor de expansión y también representa la cantidad de aumento en la frecuencia de reloj del filtro $H_1(z^K)$. No obstante, el valor Ω_L fue obtenido en forma heurística [2].

3 Método propuesto

A continuación se presentará, en la Sección 3.1, el método de optimización para obtener el valor

Ω_L . En la Sección 3.2 se dará una modificación a la estructura de la Figura 1, que permite una mayor reducción en el número de coeficientes. La Sección 3.3 presentará un ejemplo detallado con los pasos de diseño propuestos.

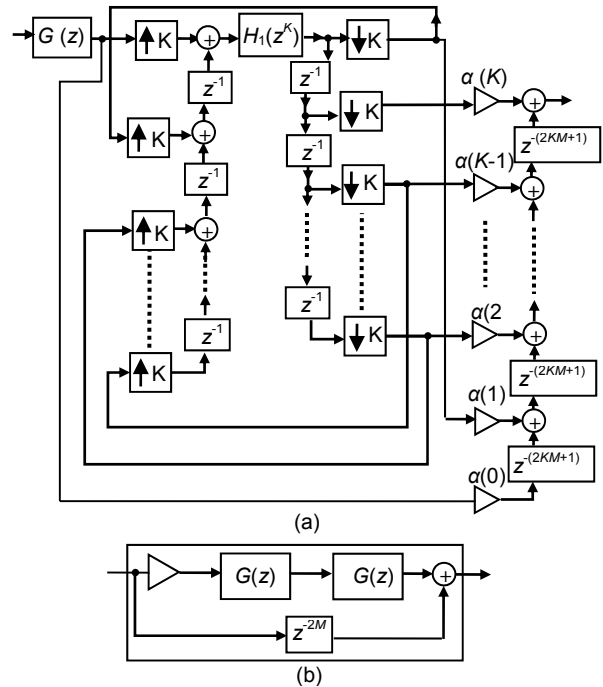


Fig. 1. Estructura basada en la técnica PI para un transformador de Hilbert [2]

3.1 Minimización del número de coeficientes requeridos

El número total de coeficientes requeridos en la estructura de la Figura 1 puede ser aproximado por

$$N_{coef} \approx \beta(L_G + 1) + L_P / 2, \quad (17)$$

donde L_G es la longitud del subfiltro, L_P es la longitud del filtro prototipo y $\beta = 3/4$ si se desea utilizar un subfiltro Tipo-III o $\beta = 3/2$ si el subfiltro es Tipo-IV.

La longitud del filtro prototipo puede ser estimada eficientemente con base en los resultados de [8], de la siguiente manera,

$$L_p = \{[0.002655(\log_{10}(\delta))^3 + 0.031843(\log_{10}(\delta))^2 - 0.554993\log_{10}(\delta) - 0.049788]/(\Omega_L / 2\pi)\} + 1. \quad (18)$$

De modo similar, la longitud del subfiltro puede ser estimada utilizando la misma fórmula, solamente sustituyendo ω_L en lugar de Ω_L y δ_G en lugar de δ , con δ_G dado en (16c). Sustituyendo (18) en (17) y calculando δ_G de (16c), se llega a

$$N_{coef} = \beta\{[0.002655(\log_{10}[0.5 - 0.5\sin(\Omega_L / 2)])^3 + 0.031843(\log_{10}[0.5 - 0.5\sin(\Omega_L / 2)])^2 - 0.554993 \times \log_{10}[0.5 - 0.5\sin(\Omega_L / 2)] - 0.049788]/(\omega_L / 2\pi)\} + 2\beta + \frac{1}{2}\{[0.002655(\log_{10}(\delta))^3 + 0.031843(\log_{10}(\delta))^2 - 0.554993\log_{10}(\delta) - 0.049788]/(\Omega_L / 2\pi)\} + \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Observamos que las variables en (19) son β , δ , ω_L y Ω_L . Sin embargo, β , δ y ω_L son valores conocidos que pueden ser sustituidos previamente. Por lo tanto, el número total de coeficientes queda explícitamente en función de Ω_L . Por lo tanto, el problema de optimización se expresa como

$$\min_{\Omega_L} N_{coef} \quad (20)$$

tal que $0 < \Omega_L < \pi$,

con N_{coef} dado en (19). En esta propuesta se ha utilizado la función de MATLAB `fminbnd` para resolver (20).

3.2 Estructura propuesta

De la Figura 1b se observa que el bloque básico $H_1(z)$ está formado por dos subfiltros conectados en cascada. Esta conexión puede ser evitada utilizando también la técnica PI (*Pipelining-Interleaving*). Como resultado, se obtiene la estructura de la Figura 2. Esta modificación trae como consecuencia una disminución en el número de coeficientes requeridos, ya que el subfiltro se implementa solamente una vez dentro de $H_1(z)$. El número total de coeficientes requeridos en la estructura propuesta se determina utilizando (19), solamente sustituyendo $\beta = 1/2$ si el subfiltro es Tipo-III o $\beta = 1$ si es Tipo-IV. Por lo tanto, el valor

Ω_L óptimo se obtiene resolviendo (20) con los valores adecuados de β .

Debe notarse que con la estructura propuesta se requiere que el bloque básico $H_1(z^K)$ sea controlado con una mayor frecuencia de reloj. El aumento en la frecuencia de reloj está dado, para la estructura de la Figura 1b y para la estructura propuesta, como

$$K = \gamma \left[\frac{L_p}{2} - 1 \right], \quad (21)$$

donde $\gamma = 1$ para la estructura de la Figura 1b y $\gamma = 2$ para la estructura propuesta. Sustituyendo (18) en (21), K se puede estimar en función de Ω_L . Derivando esta función con respecto a Ω_L e igualando la derivada a cero podemos obtener el valor en el que K es mínimo. El mínimo K existe en un valor Ω_L infinito. Esto significa que cuando hay restricción en el aumento de la frecuencia de reloj de $H_1(z^K)$, Ω_L no debe ser menor a un mínimo valor dado por

$$\Omega_L = \gamma \cdot \pi \cdot [0.002655(\log_{10}(\delta))^3 + 0.031843(\log_{10}(\delta))^2 - 0.554993\log_{10}(\delta) - 0.049788]/(K + 0.5\gamma), \quad (22)$$

Nótese de (21) que en la estructura propuesta el valor K siempre es un número par, dado que $\gamma = 2$ en ese caso.

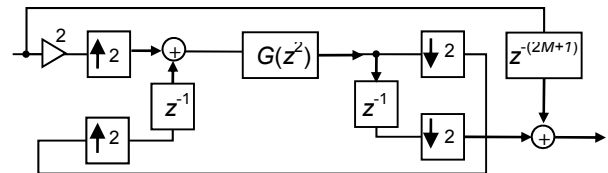


Fig. 2. Estructura propuesta para el bloque básico $H_1(z)$

3.3 Procedimiento de diseño

El procedimiento de diseño de un transformador de Hilbert con especificación dada en (14) se da en los siguientes pasos.

Paso 1. Resolver (20), sustituyendo los valores adecuados de β , δ y ω_L , para obtener Ω_L . Si hay

restricción en el valor K , calcular también Ω_L con (22) y elegir el valor Ω_L más alto.

Paso 2. Diseñar el filtro prototipo tal que satisfaga (15) y el subfiltro tal que satisfaga (16). Estimar las longitudes iniciales L_P y L_G usando (18).

Paso 3. Redondear los coeficientes del filtro prototipo de la siguiente manera,

$$p_R(n) = 2^{-B_P} \cdot \text{round}[p(n)/2^{-B_P}] \quad (23)$$

donde $p_R(n)$ es la respuesta al impulso con coeficientes redondeados, B_P es la longitud de palabra del filtro prototipo y $\text{round}[x]$ indica la operación de redondeo hacia el entero más cercano a x . Los coeficientes del subfiltro se deben redondear usando (23), simplemente sustituyendo $g_R(n)$, B_G y $g(n)$ en lugar de $p_R(n)$, B_P y $p(n)$, respectivamente, con $g_R(n)$ siendo la respuesta al impulso del subfiltro con coeficientes redondeados y B_G la longitud de palabra del subfiltro. B_P puede ser estimada como sigue [4],

$$B_P = -\log_2 \left(\frac{\delta}{2\sqrt{(2L_P - 1)/3}} \right) \quad (24)$$

B_G puede estimarse usando (24), solamente sustituyendo δ_G y L_G en lugar de δ y L_P , respectivamente. Los valores L_P y L_G deben ser los obtenidos finalmente en el Paso 2 (no los valores estimados). Si los filtros no satisfacen la especificación correspondiente, incrementar B_P y B_G .

Paso 4. Aplicar el algoritmo de [10] para eliminar las subexpresiones comunes en el subfiltro. Además obtener los coeficientes $a(n)$ a partir de $p(n)$ y representarlos en forma Canónica de Dígitos con Signo (*Canonical Signed Digit*, CSD).

A continuación se presenta un ejemplo de diseño.

Ejemplo 1. Diseñe un transformador de Hilbert que satisfaga (14), con $\delta = 0.004$ y $\omega_P = 0.01\pi$. Considere como máximo un aumento en

la frecuencia de reloj del bloque $H_1(z^K)$ dado por $K = 9$.

Paso 1. Se utiliza $\beta = 3/4$ debido a que K es impar. Esto significa que la estructura del bloque básico será la de la Figura 1b, con un subfiltro Tipo-III. Los valores $\delta = 0.004$, $\beta = 3/4$ y $\omega_P = 0.01\pi$ se sustituyen en (19). Se resuelve (20) utilizando la función `fminbnd` de MATLAB y se obtiene $\Omega_L = 0.139\pi$. Debido a que hay una restricción en el aumento de la frecuencia de reloj, también se calcula Ω_L utilizando (22), donde se sustituyen $K = 9$ y $\gamma = 1$. Se obtiene $\Omega_L = 0.1503\pi$. De ambos valores obtenidos, se elige $\Omega_L = 0.1503\pi$, por ser el más alto de los dos.

Paso 2. Se estima la longitud del filtro prototipo, L_P , sustituyendo $\Omega_L = 0.1503\pi$ en (18). Se obtiene $L_P = 20$. Para estimar la longitud del subfiltro, L_G , se necesita calcular δ_G usando (16c). Se obtiene $\delta_G = 0.3831$. Entonces se substituye δ_G y $\omega_L = 0.01\pi$ en (18). El valor estimado es $L_G = 38.37$. Los filtros cumplen las especificaciones requeridas usando $L_P = 20$ y $L_G = 23$.

Paso 3. Los coeficientes del filtro prototipo y del subfiltro son redondeados usando (23). Los valores estimados usando (24) son $B_P = 10.82$ y $B_G = 4.4$. Los filtros finales cumplen sus respectivas especificaciones usando $B_P = 13$ y $B_G = 6$.

Paso 4. Los coeficientes del subfiltro son simplificados usando el método de [10]. Los coeficientes de la estructura son obtenidos de su relación con $p_R(n)$ (ver (2)-(4)) y representados en CSD. La Tabla 1 muestra los coeficientes del subfiltro y la Tabla 2 muestra los coeficientes de la estructura. La Figura 3 presenta la estructura resultante para el transformador de Hilbert del Ejemplo 1. La Figura 4a muestra el detalle de la respuesta en magnitud en la banda de paso y la Figura 4b presenta el detalle de la banda de transición. El filtro resultante requiere 87 sumadores y no utiliza multiplicadores.

Tabla 1. Coeficientes del subfiltro del ejemplo 1

$g(n) = -g(L_G - 1 - n)$	$x_1 = 2^0 - 2^{-2}$	$x_2 = 2^0 + 2^{-2}$
$g(0) = -2^{-3}x_2 - 2^{-4}x_1$	$g(4) = -2^{-4}$	$g(8) = -2^{-3}$
$g(2) = -2^{-4}x_1$	$g(6) = -2^{-4}x_2$	$g(10) = -2^{-2}x_2 - 2^{-4}x_2$

Tabla 2. Coeficientes de la estructura del ejemplo 1

$\alpha(0) = -2^1 + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-9}$	$\alpha(5) = -2^1 + 2^{-1} - 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7}$
$\alpha(1) = -2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} - 2^{-6} - 2^{-8} + 2^{-11}$	$\alpha(6) = 2^3 - 2^1 - 2^{-2} + 2^{-4} - 2^{-6}$
$\alpha(2) = -2^{-2} + 2^{-8}$	$\alpha(7) = 2^2 - 2^{-2} - 2^{-4}$
$\alpha(3) = -2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7} - 2^{-9}$	$\alpha(8) = -2^3 + 2^1 + 2^{-1} - 2^{-3}$
$\alpha(4) = -2^2 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} - 2^{-7}$	$\alpha(9) = -2^2 - 2^{-2}$

4 Discusión de resultados

Con el propósito de comparar el método propuesto, a continuación se realizan dos transformadores de Hilbert tomados de las referencias [6, 7, 8]. Ambas estructuras del bloque básico $H_1(z)$, la de la Figura 1b y la de la Figura 2, son utilizados en los diseños propuestos.

Ejemplo 2. Diseñe un transformador de Hilbert que satisfaga (14), con la siguiente especificación [7]: $\delta = 0.0001$ y $\omega_P = 0.00625\pi$.

La Tabla 3 muestra las características del filtro prototipo y del subfiltro para ambos casos, cuando se usa el bloque básico de la Figura 1b y cuando se utiliza el de la Figura 2. La Tabla 4 exhibe la comparación contra los diseños de [2, 7] en términos del número de sumadores y del número de multiplicadores requeridos. De la Tabla 4 puede verse que utilizando el método de optimización propuesto con la estructura de la Figura 1b para el bloque básico $H_1(z)$, la reducción en el número de sumadores es apenas del 1.24% con respecto al resultado de [2]. Por otra parte, cuando se utiliza la estructura propuesta para el bloque básico, se obtiene una reducción en el número de sumadores de 24.84% con respecto a [2]. Nótese que en este caso el número de sumadores es 5.5% menor que el número de sumadores utilizado en [7]. Además, el filtro propuesto no requiere multiplicadores.

La Tabla 5 muestra las características del filtro prototipo y del subfiltro para ambos casos, cuando se usa el bloque básico de la Figura 1b y cuando se utiliza el de la Figura 2. La Tabla 6 presenta la comparación contra los diseños de [2, 6, 8] en términos del número de sumadores y del número de multiplicadores requeridos. Es posible ver de la Tabla 6 que el filtro resultante diseñado con el método de optimización propuesto, usando la estructura de [2] para el bloque básico (ver Figura 1b), utiliza 9.82% menos sumadores que el diseño realizado en [2]. Por otra parte, utilizando la estructura propuesta en el bloque básico, la reducción en el número de sumadores es de 38.17%.

Ejemplo 3. Diseñe un transformador de Hilbert que satisfaga (14), con la siguiente especificación [6, 8]: $\delta = 0.0001$ y $\omega_P = 0.00125\pi$.

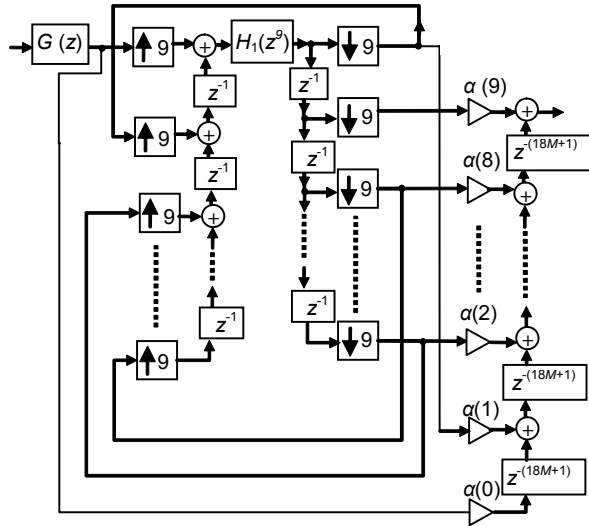
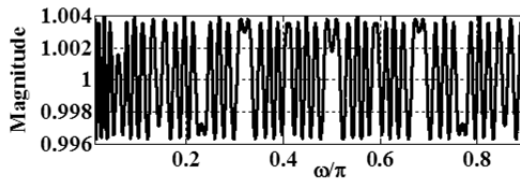
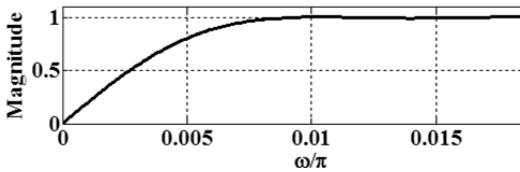


Fig. 3. Estructura basada en la técnica PI para el ejemplo 1



(a)



(b)

Fig. 4. Respuesta en magnitud del transformador de Hilbert del Ejemplo 1; (a) Detalle de banda de paso, (b) Detalle de banda de transición

Tabla 3. Características del filtro prototipo y del subfiltro en el ejemplo 2

	Long. de filtro	Frec. límite inferior	Frec. límite superior	Rizo de banda de paso	Long. de palabra
Filtro prototipo (estruct. Fig. 1b)	36	0.1449π	π	0.0001	18
Subfiltro (estruct. Fig. 1b)	35	0.00625π	0.99375π	0.3872	8
Filtro prototipo (estruct. propuesta)	30	0.1733π	π	0.0001	18
Subfiltro (estruct. propuesta)	39	0.00625π	0.99375π	0.3656	8

Tabla 4. Comparaciones del ejemplo 2

Diseño	No. Sumadores	No. Multiplicadores
[Lim & Yu, 2005]	128	62
[Cruz-Jiménez et al., 2010]	161	0
Propuesto (estructura Fig. 1b)	159	0
Propuesto (estruct. propuesta)	121	0

Obsérvese que aunque el número de sumadores utilizados es mayor que el de [8], ese diseño requiere 107 multiplicadores. Adicionalmente, el diseño de [6] requiere 48 multiplicadores. El filtro propuesto, por otra parte, no necesita multiplicadores.

5 Conclusiones

En este artículo se ha presentado un método eficiente para diseñar transformadores de Hilbert con especificaciones muy estrictas y con la minimización del número estimado de los coeficientes. La estructura de diseño está basada en la técnica de Transformación en Frecuencia

Tabla 5. Características del filtro prototipo y del subfiltro en el ejemplo 3

	Long. de filtro	Frec. límite inferior	Frec. límite superior	Rizo de banda de paso	Long. de palabra
Filtro prototipo (estruct. Fig. 1b)	76	0.069π	π	0.0001	18
Subfiltro (estruct. Fig. 1b)	67	0.00125π	0.99875π	0.446	8
Filtro prototipo (estruct. propuesta)	62	0.0836π	π	0.0001	18
Subfiltro (estruct. propuesta)	67	0.00125π	0.99875π	0.4345	8

Tabla 6. Comparaciones del ejemplo 3

Diseño	No. Sumadores	No. Multiplicadores
[Lim et al., 2005]	211	107
[Lehto et al., 2009]	(no dado)	48
[Cruz-Jiménez et al., 2010]	448	0
Propuesto (estructura Fig. 1b)	404	0
Propuesto (estruct. propuesta)	277	0

(*Frequency Transformation, FT*), donde se utiliza repetidamente un bloque básico compuesto de dos subfiltros idénticos conectados en cascada.

Se ha tomado ventaja de la técnica de Segmentación-Intercalamiento (*Pipelining-Interleaving, PI*) para evitar el uso repetitivo del mismo bloque básico, y también para evitar el uso repetitivo del subfiltro dentro de dicho bloque. Adicionalmente se ha aplicado redondeo a los coeficientes del filtro para que los multiplicadores sean sustituidos por sumadores y corrimientos. Debido a que la técnica PI incrementa la frecuencia de reloj del filtro, se ha introducido un criterio para obtener el diseño óptimo del filtro sin

rebasar cierto límite dado para el aumento de la frecuencia de reloj.

Como los ejemplos proporcionados lo demuestran, se ha obtenido una reducción en el número total de sumadores utilizados en el filtro. Por lo tanto, el método propuesto da como resultado diseños con menor complejidad, en comparación con algunos otros métodos recientemente propuestos en la literatura.

Referencias

1. **Antoniou, A. (2006).** *Digital Signal Processing: Signals, Systems and Filters*. New York: McGraw-Hill.
2. **Cruz-Jiménez, M.G., Troncoso-Romero, D.E. & Jovanovic-Dolecek, G. (2010).** On design of a multiplierless very Sharp Hilbert transformer by using identical subfilters. *53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Washington, USA, 757–760.
3. **Jiang, Z. & Willson Jr., A.N. (1997).** Efficient digital filtering architectures using pipelining/interleaving. *IEEE Transactions Circuits and Systems II – Analog and Digital Signal Processing*, 44(2), 110–119.
4. **Kodek, D.M. (1980).** Design of optimal finite wordlength FIR digital filters using integer programming techniques. *IEEE Transactions Acoustic Speech. Signal Processing*, 28(3), 304–308.
5. **Lai, Y. & Lin, T.P. (1989).** Design of Hilbert transformers by multiple use of the same subfilter. *Electronics Letters*, 25(19), 1288–1290.
6. **Lehto, R., Saramaki, T., & Vainio, O. (2009).** Synthesis of wide-band linear-phase FIR filters with a piecewise-polynomial-sinusoidal impulse response. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 29(1), 25–50.
7. **Lim, Y.C. & Yu, Y.J. (2005).** Synthesis of very sharp Hilbert transformer using the frequency-response masking technique. *IEEE Transactions Signal Processing*, 53(7), 2595–2597.
8. **Lim, Y.C., Yu, Y.J., & Saramaki, T. (2005).** Optimum masking levels and coefficients sparseness for Hilbert transformers and half-band filters designed using the frequency-response masking technique. *IEEE Transactions Circuits and Systems – I: Reg. Papers*, 52(11), 2444–2453.
9. **Saramaki, T. (1987).** Design of FIR filters as a tapped cascaded interconnection of identical

subfilters. *IEEE Transactions Circuits and Systems*, 34(9), 1011–1029.

10. **Vinod, P., Lai, E., Maskell, D.L., & Meher, P.K. (2010).** An improved common subexpression elimination method for reducing logic operators in FIR filter implementations without increasing logic depth. *Integration, the VLSI Journal*, 43(1), 124–135.



David Ernesto Troncoso Romero

recibió el grado de Ingeniero en Electrónica en el Instituto Tecnológico de Minatitlán, Minatitlán, Veracruz, México, y el grado de Maestro en Ciencias en el Departamento de Electrónica del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Puebla, México, en el 2006 y el 2008, respectivamente. Actualmente es estudiante de doctorado en el Departamento de Electrónica del INAOE. Sus áreas de interés actuales están en el diseño de filtros digitales de baja complejidad con Respuesta al Impulso Finita (FIR).



Miriam Guadalupe Cruz Jiménez

se graduó en el Instituto Tecnológico de Minatitlán, Minatitlán, Veracruz, México, como Ingeniero en Electrónica, en el 2006. Recibió el grado de Maestría en el Departamento de Electrónica del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Puebla, México, en el 2010.



Gordana Jovanovic Dolecek

recibió el grado de Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Sarajevo, el grado de Maestría en Ciencias por la Universidad de Belgrado y el Doctorado por la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sarajevo. Fue profesora en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sarajevo hasta 1993. De 1993 a 1995 estuvo en el Instituto *Mihailo Pupin* de Belgrado, Yugoslavia. En 1995 se unió al Departamento de Electrónica del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Puebla, México, donde ella es actualmente profesora titular e investigadora. Durante el periodo 2001-2002 y en el 2006 estuvo en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Cómputo de la Universidad de Santa Bárbara como investigadora visitante. Durante el periodo 2008-2009 estuvo en la Universidad de San

Diego como investigadora visitante en año sabático. Es autora de tres libros, editora de uno y autora de más de 250 artículos. Es *Senior Member* de IEEE, miembro de la Academia Mexicana de Ciencias y miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), México.

Artículo recibido el 29/11/2010; aceptado el 07/03/2011.