

# Filtro estimador por deconvolución y pseudoinversa: descripción e implementación recursiva

Consuelo Varinia García Mendoza<sup>1</sup> y José de Jesús Medel Juárez<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, México

<sup>2</sup> Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, México

varinia400@hotmail.com, jjmedelj@yahoo.com.mx

**Resumen.** En este trabajo se presenta un filtro estimador con base al modelo matricial de deconvolución utilizando a la pseudoinversa como proceso de filtrado, con el cual es posible conocer la dinámica interna del modelo tipo caja negra con respuesta lineal, y con evolución invariante en el tiempo. Se presenta la descripción recursiva del filtro por deconvolución y pseudoinversa considerando: a) la convolución en diferencias finitas, b) el filtro por deconvolución y pseudoinversa, c) la descripción recursiva del funcional del error y d) las condiciones de estabilidad a cubrir por el estimador tomado en cuenta los criterios de Lyapunov. De manera ilustrativa, se presenta una simulación utilizando MatLab®.

**Palabras clave.** Deconvolución, pseudoinversa de una matriz, funcional del error, filtro estimador recursivo, estabilidad de Lyapunov.

## Filter Estimator by Deconvolution and Pseudoinverse: Recursive Description and Implementation

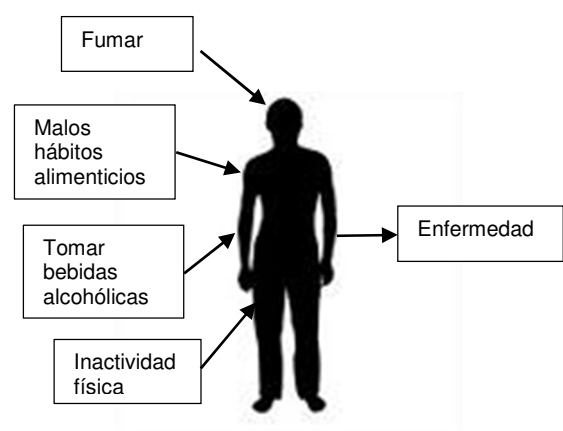
**Abstract.** In this paper we present a filter estimator based on deconvolution matrix model using the pseudoinverse as a filtering process, which permits to know the internal dynamics of a black-box model with linear response and time-invariant evolution. We present a recursive description of the filter by deconvolution and pseudoinverse considering a) convolution in finite differences, b) the filter by deconvolution and pseudoinverse, c) recursive description of error functional, and d) stability conditions to be covered by the estimator taking into account the Lyapunov criteria. To illustrate the description, a MATLAB® simulation is presented.

**Keywords.** Deconvolution, pseudoinverse of a matrix, error functional, recursive filter estimator, Lyapunov stability.

## 1. Introducción

Diversos sistemas han sido modelados como cajas negras debido a que se conocen los estímulos y la respuesta a esos estímulos; pero se desconoce la dinámica interna o función de transición que hace que el sistema tenga determinada respuesta a un estímulo.

Por ejemplo: a) cuando se conocen los factores de riesgo y la enfermedad que una persona padece pero no se sabe en qué medida esos factores lo afectaron (ver Figura 1), b) cuando se conoce el voltaje que recibe un motor de CD y las



**Fig. 1.** Sistema visto como un modelo tipo caja negra

revoluciones por segundo que desarrolla, sin conocer su dinámica interna de operación [16].

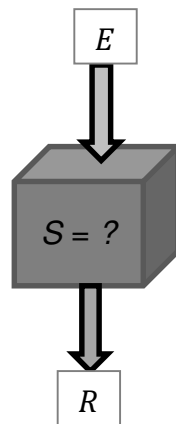
De manera general estos sistemas pueden ser modelados como se muestra en la figura 2, en donde  $E$  representa los estímulos que afectan al sistema  $S$ , y  $R$  es la respuesta del sistema.

La convolución  $R$ , es el resultado de la interacción entre los estímulos  $E$  y el sistema  $S$ .

Para conocer cómo evoluciona el sistema  $S$  se requiere de la operación inversa, la deconvolución.

La deconvolución ha sido utilizada en la solución de diversos problemas tales como: la restauración de información degradada por cualquier proceso físico [9], la reconstrucción de imágenes en microscopía [3], el análisis de medidas sísmicas [4]. Específicamente en [19] se propuso una técnica para obtener la respuesta sísmica de un edificio basada en la deconvolución de los movimientos registrados en los diferentes niveles de la construcción, observando la respuesta estructural respecto a las vibraciones del suelo.

Existen varios métodos para llevar a cabo la deconvolución como: en línea, homomórfica, la iterativa, la basada en un método de estimación de sistemas, entre otros [1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 19] Estos métodos buscan minimizar el error generado respecto a la función de transición original y su identificada.



**Fig. 2.** Diagrama a bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra SISO (*Single Input, Single Output*, una entrada y una salida)

Sin embargo hay una pérdida de información durante la transformación directa (convolución) e inversa (deconvolución), y esa pérdida es sumada a las pérdidas ya existentes en la propia información al viajar de un dispositivo a otro, o al cambiar de medio [11].

Este trabajo presenta al filtro estimador recursivo con base al método de deconvolución a través de la pseudoinversa para estimar los parámetros internos del sistema de referencia  $S$  y que describen la solución por medio de la función de transición. Se encuentra dividido en siete secciones, siendo la primera la introducción; la segunda y la tercera describen a la convolución en diferencias finitas y el método de deconvolución a través de la pseudoinversa; la cuarta, el desarrollo del filtro estimador recursivo; la quinta, presenta el modelo recursivo para conocer el nivel de convergencia del filtro estimador [11]; en la sexta, se comprueba la estabilidad del estimador considerando los criterios de Lyapunov de acuerdo con [6, 13, 20]; en la séptima se ilustra el proceso de filtrado a través de los resultados de la simulación del estimador, y las gráficas de su calidad de convergencia. Se dan las conclusiones y al final se encuentra la sección de *Anexos* que contiene las pruebas de los teoremas desarrollados a lo largo del documento.

## 2. Convolución en diferencias finitas

En esta sección se propone la descripción matricial de la convolución. A través del producto punto extendido a un periodo de tiempo  $T$  conformado por un grupo de intervalos en los cuales el sistema se mantiene invariante.

**Teorema 1 (convolución en diferencias finitas).** La convolución en diferencias finitas dentro de un conjunto de intervalos de tiempo con métricas contenidas en  $T$ , está dada de forma matricial (1).

$$R(T)_{mx1} = S(T)_{mxn} E(T)_{nx1}, \quad (1)$$

donde  $E \in R^{[mx1]}$  es el vector de respuesta, resultado del producto matricial entre la matriz ampliada  $S \in R^{[mxn]}$  (compuesta por filas de vectores desplazados de acuerdo al intervalo de tiempo correspondiente) y el vector fijo  $E \in R^{[nx1]}$ ,

que representa a la ventana de excitación para todos los intervalos de tiempo con métricas contenidas en la métrica del intervalo de tiempo extendido  $T$ .

**Prueba 1**, véase anexos.

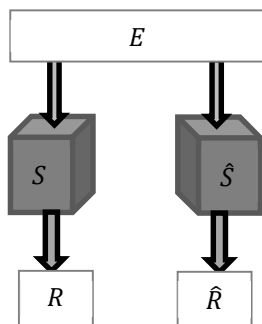
### 3. Método de deconvolución a través de la pseudoinversa

Para describir el método de deconvolución a través de la pseudoinversa es necesario considerar las propiedades matriciales establecidas entre los vectores  $E(t)$  y  $R(t)$ , que permiten estimar la función de transición  $\hat{S}(t-x)$  de acuerdo con un criterio previamente establecido. Con lo cual es posible disminuir la pérdida de información, observando a la deconvolución como una matriz.

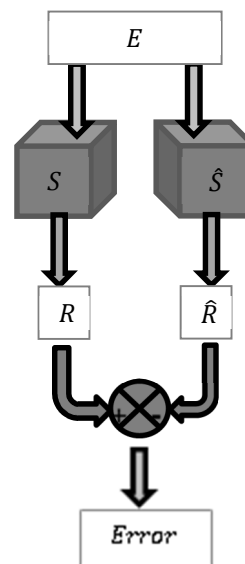
**Teorema 2 (deconvolución a través de la pseudoinversa).** Considérese al sistema extendido de la expresión (1) dentro de la métrica del intervalo de tiempo  $T$ , su respuesta identificada en relación con la figura 3, es óptima y tiene la forma (2).

$$\hat{R}_{mx1} = \hat{S}_{mxn} E_{nx1}. \quad (2)$$

Al ser su estimador  $S_{mxn}$  una función respecto al estímulo  $E_{nx1}$  y a la respuesta  $R_{mx1}$  en (3).



**Fig. 3.** Diagrama a bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra y la de su identificador respecto a la dinámica interna.



**Fig. 4.** Diagrama a bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra y la de su identificador respecto a la dinámica interna

$$\hat{S}_{nxm}^T = (E_{nx1} E_{1xn}^T)^+ E_{nx1} R_{1xm}^T. \quad (3)$$

En donde el operador  $+$  en el exponente indica que se ha realizado la pseudoinversa de acuerdo con [14, 15].

**Prueba 2**, véase anexos.

### 4. Descripción recursiva del filtro estimador por deconvolución y pseudoinversa

En la figura 2 se ilustra el proceso para para estimar la función de transición  $S_{mxn}$ . Considerando que son conocidos  $E_{nx1}$  y  $\hat{R}_{mx1}$ . Utilizando el método de deconvolución descrito en la sección anterior es posible conocer  $\hat{S}_{mxn}$  que es la función de transición estimada.

Realizando la operación de convolución entre  $E_{nx1}$  y  $\hat{S}_{mxn}$  se conoce a  $\hat{R}(t)$  la estimación de la respuesta al estímulo. De esta forma, la innovación es descrita por la diferencia existente entre la respuesta  $R$  respecto a la respuesta identificada  $\hat{R}_{mx1}$ , teniendo así a dos sistemas en operación paralela, como se ve en la figura 3.

Al usar el rotacional del funcional del error, es posible encontrar el valor óptimo para el filtro estimador.

**Teorema 3 (filtro estimador recursivo).** El estimador (3), expresado de manera recursiva para condiciones estacionarias en dos intervalos adyacentes con métricas descritas como  $T$  y  $T-1$ , en (4).

$$\hat{S}^T_{n \times m, T} = P S_{n \times 1, T} R^T_{1 \times m, T} + \hat{S}^T_{n \times m, T-1} \tag{4}$$

**Prueba 3,** véase anexos.

### 5. Descripción recursiva del funcional del error

El error de identificación es descrito como se observa en la figura 4.

**Teorema 4 (funcional del error).** El valor medio del error expresado de manera recursiva (RMSE de sus siglas en inglés: *Recursive Mean Square Error*) se encuentra en el funcional descrito por el segundo momento de probabilidad de la diferencia de la traza de la respuesta original ( $h_i := \text{traza}(R_{m \times 1})_i$ ) dentro del grupo de intervalos con métricas  $t_i \uparrow T, i = \overline{1, n}, n \in Z_+$  con respecto a la traza de su estimada ( $\hat{h}_i := \text{traza}(\hat{R}_{m \times 1})_i$ ), diferencia descrita con base en el error de estimación, definida como  $I_i := h_i - \hat{h}_i$ , en (5).

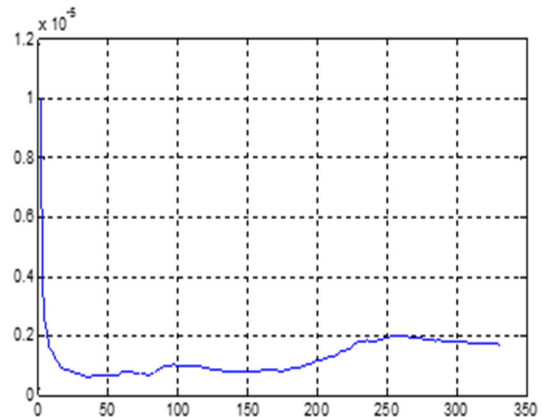
$$RMSE_n = \frac{1}{n} [I_n^2 + (n-1)RMSE_{n-1}]. \tag{5}$$

**Prueba 4,** véase anexos.

### 6. Estabilidad del filtro estimador por deconvolución y pseudoinversa

La respuesta del sistema es estable, considerando que al ser un sistema discreto expresado en diferencias finitas de manera global de acuerdo con (2), existe una descripción de Lyapunov que cubre la trayectoria del sistema dentro de una región, convergiendo a la matriz de parámetros.

**Teorema 7 (estabilidad robusta).** Considérese el sistema descrito en (1) como un sistema afín, teniendo la siguiente estructura (6).



**Fig. 5.** La traza del funcional del error (5) de identificación para 350 iteraciones

$$E(T)_{n \times 1} = \tilde{S}(T)_{n \times n} E(T - \varepsilon)_{n \times 1}. \tag{6}$$

Con  $\tilde{S}(T)_{n \times n} := I - \bar{S}(T - \varepsilon)_{n \times n} \varepsilon$  estable que cumple en el sentido de Lyapunov (7).

$$M^T_{n \times n}(T) \bar{P}_{n \times n}(T) + \bar{P}_{n \times n}(T) M_{n \times n}(T) \leq 0. \tag{7}$$

**Prueba 7,** véase anexos.

### 7. Simulación

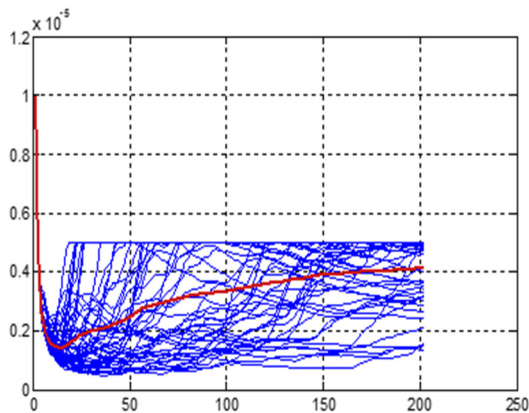
Se describe el comportamiento del funcional del error (5) del filtro estimador (4), para ello se establece un sistema de referencia con las estímulo y respuesta (8) y (9) respectivamente.

$$E(i) = 0.006 \text{ sen}(i), \tag{8}$$

$$R(i) = (0.006 \cos(t - i) + 0.03 * \text{rand}) * 0.006 \text{ sen}(i) \tag{9}$$

En la figura 5, se ilustra la traza del funcional del error (5) para un proceso de estimación con 350 iteraciones. El sistema de referencia es del tipo caja negra con condiciones estímulo-respuesta acotadas.

El funcional del error recursivo (5), en la figura 6, se muestran 50 trazas con 220 iteraciones cada una, incluyendo a la mejor descripción de ellas en el sentido de Monte-Carlo [10] y [12].



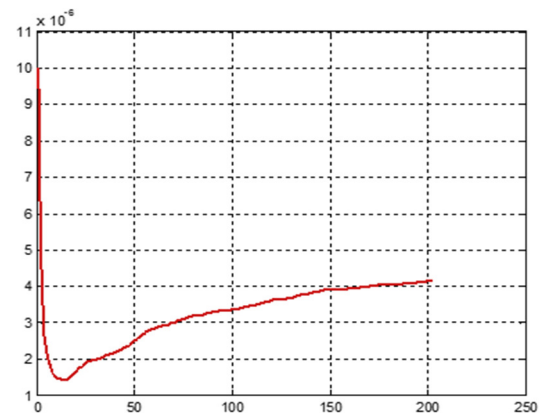
**Fig. 6.** 50 trazas del funcional del error con un recorrido de 220 iteraciones cada una. Y la curva representativa de acuerdo a Monte-Carlo

La curva representativa de acuerdo a Monte-Carlo [10] y [12] de los funcionales de error del sistema de identificación (4), se ilustra en la figura 7.

La simulación es una forma de ver de manera ilustrativa los resultados anteriormente desarrollados desde (2) hasta (5), de forma que el estimador recursivo que se encuentra en función de dos estados de tiempo adyacentes (su presente y su pasado inmediato), logra describir de una manera aproximada el comportamiento interno del sistema convolucionado dentro de un intervalo de tiempo. La secuencia de matrices en la convolución permitió construir un sistema extendido formado por vectores fila, que al momento de realizar la simulación, permite establecerlos como una secuencia dentro de un proceso, como se puede observar en las figuras 5, 6 y 7.

## 8. Conclusión

En este trabajo se presentó un modelo matricial que permitió observar a la convolución dentro de un intervalo de tiempo  $T$  como un producto de matrices, una de ellas extendida respecto del vector fijo al que se le dio el nombre de vector de excitación o de entrada, observando que en todo este proceso no se perdiera el orden.



**Fig. 7.** Curva representativa de las trazas de los funcionales de error de acuerdo con Monte-Carlo

Se consideró el modelo tipo caja negra de acuerdo con la figura 3, para realizar la deconvolución y estimar a la matriz  $\hat{S}$  de una manera recursiva.

El proceso de deconvolución, la estimación extendida es una herramienta para sistemas no cuadrados con evolución invariante en el tiempo.

El funcional del error de estimación se describió a través de las trazas tanto de la matriz extendida de referencia como de su estimado para todos los intervalos de tiempo descritos en  $T$ .

En la simulación se propusieron dos funciones periódicas con la adición de perturbaciones que afectaron tanto la entrada como la salida del modelo tipo caja negra.

Dentro de lo que fue el error de estimación, en la simulación se observó un nivel de convergencia del orden de  $10^{-25}$  unidades.

En relación con la estabilidad, esta es robusta, requiriendo que el modelo considerado tuviera una forma cuadrática de Lyapunov como la expresada en la demostración del teorema 7. Este tipo de descripción es válida para sistemas discretos a trozos, y se cumple la condición de semidefinida negativa.

Como trabajo futuro, queda el desarrollar el identificador por un proceso de deconvolución en diferencias finitas.

### ANEXOS

**Prueba 1.** La convolución de forma aproximada por diferencias finitas con métricas de los intervalos de tiempo  $t_i \in T$ , y con  $R_i := R(t_i)$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$ ,  $m \in Z_+$ , es descrita como:

$$R(t_i) = \sum_{j=1}^n S(t_i - x_j) E(x_j). \tag{10}$$

Desarrollando la sumatoria de (10) con el índice  $i$  fijo se tiene:

$$S(t_i - x_1)E(x_1) + S(t_i - x_2)E(x_2) + \dots + S(t_i - x_n)E(x_n). \tag{11}$$

Vectorialmente (11) para  $\forall i = \overline{1, m}$ ,  $m \in Z_+$  es:

$$R_i = \begin{bmatrix} S(t_i - x_1) \\ S(t_i - x_2) \\ \vdots \\ S(t_i - x_n) \end{bmatrix}_{1 \times n} \begin{bmatrix} E(x_{j=1}) \\ E(x_{j=2}) \\ \vdots \\ E(x_{j=n}) \end{bmatrix}_{n \times 1} \tag{12}$$

Sabiendo que el vector extendido  $E(x_{j=\overline{1, n}})$  es fijo para todos los intervalos de tiempo con métricas contenidas en la métrica del intervalo de evolución del sistema  $T$ , la secuencia del vector de salida que abarca todos los intervalos contenidos en el intervalo de evolución  $T$  con  $R_i|_{i=1}^m$  queda expresada de acuerdo con (13):

$$R_{m \times 1} = \begin{bmatrix} S(t_1 - x_1) & \dots & S(t_1 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S(t_m - x_2) & \dots & S(t_m - x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(x_1) \\ \vdots \\ E(x_n) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Y que simbólicamente se tiene:

$$R(T)_{m \times 1} = S(T)_{m \times n} E(T)_{n \times 1} \blacksquare. \tag{14}$$

**Comentario 1.** En (14), al considerar que el desplazamiento temporal entre los vectores fila  $\{S(t_i - x_j)\}$  para todos los casos contenidos en  $T$  no afecta a la descripción matricial del sistema, se tiene un vector de excitación fijo  $E(X)$ ,  $X = \{x_j\}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $n \in Z_+$ .

**Prueba 2.** Transponiendo (2), el proceso de innovación cuadrático  $Q^T$  es descrito como:

$$Q^T_{1 \times m} := (R^T_{1 \times m} - \hat{R}^T_{1 \times m})^2. \tag{15}$$

El rotacional del proceso de innovación  $\nabla \times Q^T_{G'_{n \times m}}$  es:

$$\frac{\partial \times Q^T}{\partial \hat{S}^T_{n \times m}} = \frac{\partial \times (R^T_{1 \times m} - E^T_{1 \times n} \hat{S}^T_{n \times m})^2}{\partial \hat{S}^T_{n \times m}}. \tag{16}$$

De forma que la derivada direccional de  $E^T_{1 \times n} \hat{S}^T_{n \times m}$  respecto de  $\hat{S}^T_{n \times m}$  es  $E_{n \times 1}$ , al ser resultante ortogonal el vector derivado y aplicando (15) en (16):

$$\frac{\partial \times Q^T}{\partial \hat{S}^T_{n \times m}} = -2E_{n \times 1} R^T_{1 \times m} + 2E_{n \times 1} E^T_{1 \times n} \hat{S}^T_{n \times m}. \tag{17}$$

En su punto de equilibrio, el rotacional del proceso de innovación es:

$$2E_{n \times 1} R^T_{1 \times m} = 2E_{n \times 1} E^T_{1 \times n} \hat{S}^T_{n \times m}. \tag{18}$$

Y que al organizar (18), el estimador es descrito en (3). ■

**Comentario 2.** El estimador es óptimo al considerar el punto de equilibrio usado en (17) para describir (3).

**Prueba 3.** Considérese a (3) con  $P_{S_T} := [(E_{n \times 1, T} E^T_{1 \times n, T})^+ E_{n \times 1, T}] \in R^{[n \times 1]}$ , se escribe para el conjunto de métricas de los intervalos que conforman a  $T$ :

$$\hat{S}^T_{n \times m, T} = \sum_{t=1}^T P_{S_{n \times 1, t}} R^T_{1 \times m, t}. \tag{19}$$

Con condiciones estacionarias para el periodo de tiempo inmediato anterior:

$$\hat{S}^T_{n \times m, T-1} = \sum_{t=1}^{T-1} P_{S_{n \times 1, t}} R^T_{1 \times m, t}. \tag{20}$$

Y que al ver (20) en (19), tomando el último término  $P_{S_{n \times 1, T}}$  de (19) se logra la obtención de (4).

**Prueba 4 (forma directa).** El RMSE, al usar el segundo momento de probabilidad respecto a la

diferencia del error de estimación  $I_i$  para  $i = \overline{1, n}, n \in Z_+$ :

$$RMSE_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_i)^2. \quad (21)$$

Para el último término con  $i = n$  de (21):

$$RMSE_n = \frac{1}{n} \left[ I_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (I_i)^2 \right]. \quad (22)$$

El RMSE retardado con  $i = \overline{1, n-1}$  y condiciones estacionarias de acuerdo con [2]. [17] y [18]:

$$RMSE_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} I_i^2. \quad (23)$$

Al describir este último resultado de acuerdo con (22):

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_i^2 = (n-1)RMSE_{n-1}. \quad (24)$$

El RMSE, considerando (24) en (22), se obtiene (5). ■

**Prueba 7.** Existe una matriz  $L_{n \times m}$  que permite tener la forma (25)

$$\dot{E}(T) = \bar{S}_{n \times n}(T)E(T)_{n \times 1}, \quad (25)$$

que en diferencias finitas se tiene la forma (6) de acuerdo con (26)

$$\tilde{S}(T)_{n \times n} := I_{n \times n} - \bar{S}(T - \varepsilon)_{n \times n} \varepsilon. \quad (26)$$

Al ser (27) estable si cumple en el sentido de Lyapunov la condición (28)

$$\bar{S}(T)_{n \times n} := L(T)_{n \times m} S(T)_{m \times n}. \quad (27)$$

$$V(T) = E(T)^T P E(T). \quad (28)$$

Dada la función candidata definida positiva y que en el caso que su incremento sea semidefinido negativo, es decir, que  $\Delta V(T) \leq 0$ .

La función candidata en su primera diferencia finita es  $\Delta V(t) = \varepsilon \dot{V}(t)$ , en donde

$$\dot{V}(T) = \dot{E}_{1 \times n}^T(T) P_{n \times n} E_{n \times 1}(T) + E_{1 \times n}^T(T) P_{n \times n} \dot{E}_{n \times 1}(T). \quad (29)$$

Y al considerar que se tiene el sistema afín:

$$\dot{E}_{n \times 1}(T) = \tilde{S}_{n \times n}(T) E_{n \times 1}(T). \quad (30)$$

Al sistema (3), y en diferencias finitas a (6), donde

$$\check{S}_{n \times n}(T - \varepsilon) := [I_{n \times n} - \bar{S}_{n \times n}(T - \varepsilon)]. \quad (31)$$

Así como (32) y (33)

$$M_{n \times n}(T) := \check{S}_{n \times n}(T) \check{S}_{n \times n}(T - \varepsilon), \quad (32)$$

$$\bar{P}_{n \times n}(T) := \bar{P}_{n \times n} \check{S}_{n \times n}(T - \varepsilon). \quad (33)$$

Al desarrollar todo el proceso algebraico, considerando que la matriz  $\bar{P}$  es del tipo hermit, se cumple (7). ■

## Agradecimientos

Agradecemos al CONACYT por el apoyo otorgado en la realización de mis estudios de doctorado y al Instituto Politécnico Nacional por proporcionarme el desarrollo científico e intelectual.

## Referencias

1. **Bandzuch, P., Morhác, M., & Kristiak, J. (1997).** Study of the Van Cittert and Gold Iterative Methods of Deconvolution and their Application in the Deconvolution of Experimental Spectra of Positron Annihilation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 384, No. 2-3, pp. 506–515.
2. **Baron, M. (2013).** *Probability and Statistics for Computer Scientists*. 2nd ed., CRC Press, Taylor & Francis Group.
3. **Chacón, M. (2007).** *Procesamiento Digital de Imágenes*. Trillas.
4. **Cordero, S. (2003).** Seismograms Deconvolution by Digital Division and Inverse Filtering Spectral Simulation and Digital Seismograms. *Compendium of Research Papers, CNDG-Library Geophysical Institute of Peru*, Vol. 4, pp. 131–146.

5. **De la Rosa, J.I., Miramontes de León, G., García Domínguez, E., Esquivel, M.A., & Villa Hernández, J. (2006).** A Comparative Evaluation of four Algorithms for Numeric Solution of the Deconvolution on Unidimensional Systems. *Computación y Sistemas*, Vol. 10, No. 2, pp. 135–158.
6. **García, J.C., Medel, J.J., & Palma Orozco, R. (2009).** *Sistemas con lógica difusa*. IPN.
7. **Grewal, M.S. & Andrews, A.P. (2008).** *Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB*. 3rd ed., Wiley.
8. **Diniz, P.S.R. (2013).** *Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation*. 4th ed., Springer.
9. **Jansson, P.A. (1984).** *Deconvolution with Applications in Spectroscopy*. Academic Press.
10. **Kalos, M.H. & Whitlock, P.A. (2008).** *Monte Carlo Methods*. Wiley-VCH.
11. **Karrenberg, U. (2013).** *Signals, Processes and Systems*. 3rd. ed., Springer.
12. **Kroese, D.P., Taimre, T., & Z.I. Botev (2011).** *Handbook of Monte Carlo Methods*. Wiley.
13. **Landau, I.D., Lozano, R., M'Saad, M., & Karimi, A. (2011).** *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. 2nd ed., Springer.
14. **Larson, R. & Falvo, D. (2013).** *Elementary Linear Algebra*. 7th ed., Brooks/Cole.
15. **Lax, P. (2007).** *Linear Algebra and Its Applications*. 2nd ed., Wiley.
16. **Medel, J.J., Urbieta Parrazales, R., & Palma Orozco, R. (2011).** Estimador estocástico para un sistema tipo caja negra. *Revista Mexicana de Física*, Vol. 57, No. 3, pp. 204–210.
17. **Mendenhall, W., Beaver, R., & Beaver, B. (2013).** *Introduction to Probability and Statistics*. 14th ed., Books/Cole.
18. **Poznyak, A.S. & Najim, K. (1997).** *Learning Automata and Stochastic Optimization*. Springer-Verlag.
19. **Snieder, R., Sheiman, J., & Rodney, C. (2006).** Equivalence of the virtual-source method and wave-field deconvolution in seismic interferometry. *Physical Review E*, Vol. 73(066620), pp. 1–9.
20. **Tripathi, S. (2008).** *Modern Control Systems: An Introduction*. Computer Science Series.

**Consuelo Varinia García Mendoza** es ingeniera en sistemas computacionales por la Escuela Superior de Cómputo del IPN. Obtuvo su maestría y doctorado en Tecnología Avanzada por el CICATA-Legaría del IPN. Actualmente es profesora de la Escuela Superior de Cómputo del IPN. Su área de investigación es el filtrado digital de señales.

**José de Jesús Medel Juárez** es aeronáutico por la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Obtuvo su maestría y doctorado en la especialidad de Control Automático por el Cinvestav. Actualmente es investigador del Centro de Investigación en Computación del IPN. Su área de investigación es el control automático y el filtrado digital de señales.

*Article received on 10/09/2013; accepted on 21/10/2013.*