

Obtención de la onda dicrota mediante simulación numérica utilizando el modelo de Ogden

Jorge Castro-López¹, Teodoro Cordova-Fraga¹, Rafael Guzmán-Cabrera²

¹ Universidad de Guanajuato campus León, División de Ciencias e Ingenierías, México

² Universidad de Guanajuato campus Irapuato-Salamanca, División de Ingenierías, México

guzmanc@ugto.mx

Resumen. En este trabajo se hace una propuesta para un mejor entendimiento del comportamiento de la arteria aorta ascendente. Se propone que la onda dicrota que aparece en la curva de presión es el resultado del estímulo a un material hiperelástico. Dicha propuesta es puesta a prueba mediante la simulación numérica de la interacción del flujo sanguíneo con la pared arterial. Se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes con las condiciones iniciales y propiedades físicas propias del flujo sanguíneo para una persona en promedio sana; de manera simultánea los campos obtenidos, (presión y velocidad), alimentan los forzamientos de la estructura sólida, (pared arterial), para así obtener el comportamiento de la arteria aorta bajo la influencia del flujo sanguíneo. La aproximación a las soluciones de las ecuaciones dictaminantes y el acoplamiento de ambas estructuras se realiza mediante un conjunto de algoritmos para resolver el problema de la interacción del flujo sanguíneo con la pared arterial en 3D utilizando un método que proporciona acoplamiento débil y que es, en general, válido para modelos constitutivos no-lineales y con grandes deformaciones. Los resultados obtenidos son similares a los obtenidos en la clínica

Palabras clave. Interacción fluido-estructura, hiperelástico, onda de presión, onda dicrota, modelo de Ogden.

Obtaining the Dicrotic Notch by Numerical Simulation Using the Ogden Model

Abstract. A proposal for the better understanding of the ascending aorta mechanical behavior is made. It is

proposed that the dicrotic notch on the cardiac cycle is the result to the stimulus of an hyper elastic material. This proposal is sustained by the numerical study of the interaction between the blood flow and the arterial walls. The Navier-Stokes equations for the blood flow are solved with the initial conditions and the physical properties corresponding to an average healthy human aorta. The obtained velocity and pressure fields increase the stress on the solid wall (*arterial wall*), consequently the behavior of the aorta under the blood flow is obtained. Solutions to the 3D governing equations are obtained through algorithms that solve for the weak form of the coupling between the blood flow and arterial wall. This method is valid for non-linear models subjects to large deformations. Computational results are verified by available experimental data for tensile tests of the ascending aorta. Realistic parameters for both the isotropic hyper elastic Ogden and neo-Hookean models were obtained.

Keywords. Fluid-structure interaction, hyper elastic, pressure wave, dicrotic notch, Ogden model.

1. Introducción

En la actualidad el interés sobre la simulación numérica del comportamiento mecánico de la arteria aorta ascendente radica en que proporciona información relevante para la clínica.

La onda de presión es un indicador del estado de salud del sistema circulatorio en general, la salud de las arterias, el corazón, el riñón y la sangre misma pueden monitorearse a través de la onda de presión.

El potencial del modelado numérico radica no sólo en la comprensión del fenómeno en casi su

totalidad, ya que a partir de la observación del fenómeno se proponen modelos que explican el mecanismo de funcionamiento del proceso, sino que también surgen variables poco evidentes que pueden ser nuevos indicadores del estado de salud de las arterias, como son la verticidad y la turbulencia en el flujo sanguíneo, así como el trabajo cardiaco en el corazón y los diagramas fase en el monitoreo de la presión arterial. Numerosos estudios [1-4], han intentado reproducir esta onda de presión utilizando diferentes hipótesis sobre el comportamiento del flujo y de la pared arterial, se han implementado también una gran cantidad de métodos numéricos para la solución tanto del flujo sanguíneo, del medio continuo y su interacción. Diferentes modelos también se han usado para representar la naturaleza hiperelástica de la pared arterial [5, 6].

Este trabajo reproduce la onda de presión proponiendo que la mayor influencia sobre su forma es precisamente el comportamiento mecánico de la arteria aorta, se utiliza un fluido viscoso y se emplea el método de elementos finitos para la solución de ambos modelos junto con su interacción. Las principales propuestas para el estudio del flujo sanguíneo y su interacción con la pared arterial son las siguientes:

- Para el análisis de fuerzas se utiliza el modelo de cadena generalizado propuesto por Quarteroni [7], con un material de Ogden hiperelástico isótropo.
- Los campos de presión que forzan el modelo de la pared arterial se obtienen de la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo el esquema de Chorin-Teman.
- La interacción fluido-estructura se resuelve mediante el método ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian).

Las condiciones iniciales y de frontera, así como las propiedades de la arteria y de la sangre que se usan en los modelos a resolver son las que se reportan para una persona sana en promedio, obteniendo con esto que las soluciones son también las reportadas para una persona sana en promedio. Así pues, en este trabajo se logra reproducir, con las

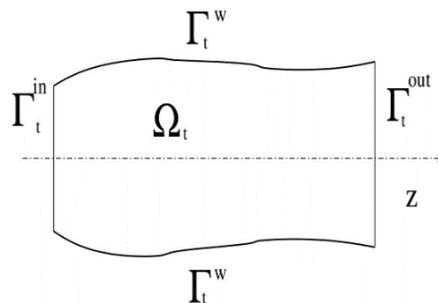


Fig. 1. Sección longitudinal de la arteria

consideraciones mencionadas, la curva de presión sanguínea de la arteria aorta ascendente.

2. Metodología

2.1. La pared arterial

Los materiales isótropos han mostrado ser efectivos para modelar el tejido blando, y en la industria se usan de manera frecuente precisamente para obtener modelos de diferentes materiales como hules y cauchos [8,9], sin embargo, dentro de la gama de materiales isótropos existentes se encuentra el modelo de Ogden, el cual se utiliza en este trabajo con un reajuste en sus parámetros para hacer rígido el material a pequeñas deformaciones, haciendo con lo anterior que el modelo se ajuste de manera satisfactoria al material de la pared arterial.

Los materiales que son capaces de recuperar su forma original después de sufrir una deformación debido a la acción de una fuerza son llamados elásticos. Algunos de estos materiales son del tipo hiperelásticos. Los materiales hiperelásticos, se encuentran caracterizados por la expresión de su función de energía libre de deformación, W , la cual describe como se almacena la energía en el cuerpo. Los modelos teóricos que describen el comportamiento mecánico de los materiales elásticos se basan en el estudio de sus geometrías y de acciones de fuerza básicas como, compresión y tracción uniaxial, tracción cortante, etc. En el 2004 Ogden [5], propone un modelo basado en las

deformaciones principales del material y se expresa de la siguiente manera:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i}, \quad (1)$$

donde α_i , μ_i y λ_i son las constantes de ajuste del material y el segundo término que incluye al determinante del tensor de deformación $J = \det(F)$ representa la relación de volúmenes entre la condición deformada e inicial.

2.1.1. El modelo de la pared arterial

La geometría para el estudio de la arteria aorta ascendente se asumirá como un cilindro recto y se considerarán las siguientes suposiciones:

- Espesor delgado y esfuerzo plano,
- Geometría cilíndrica y desplazamiento radial,
- Gradientes de pequeñas deformaciones,
- Incompresibilidad de la pared arterial.

La configuración en el tiempo t de la superficie del cilindro está dada por:

$$\Gamma_t^w = \{(r, \Theta, z) : r = R(\Theta, z; t), \Theta \in [0, 2\pi), z \in [0, L]\}.$$

Se indicará con n el vector normal a la superficie de la arteria y se tomó un diferencial de superficie dS , para el análisis de fuerzas sobre la arteria, las cuales son:

Fuerzas envolventes de la arteria. Sobre toda la pared arterial se ejerce una presión externa constante P_{ext} , donde la fuerza resultante actuando sobre dS es simplemente:

$$f_{arteria} = -P_{ext}n d\sigma + o(d\sigma). \quad (2)$$

Fuerzas del fluido. Las fuerzas que ejerce el fluido sobre la pared arterial son representadas por el esfuerzo de Cauchy sobre la pared. Si se indica con T_f el tensor de esfuerzo para el fluido, tenemos:

$$\begin{aligned} f_{fluid} &= -T_f \cdot n d\sigma + o(d\sigma) \\ &= P n d\sigma - 2\mu D(u) \cdot n d\sigma + o(d\sigma). \end{aligned} \quad (3)$$

Considerando los esfuerzos radiales σ_θ , con un término de amortiguamiento, los esfuerzos longitudinales σ_z , con un término de viscoelasticidad y haciendo el análisis de esfuerzos obtenemos el modelo a resolver, que recibe el nombre de modelo de cadena generalizado [10], por tomar en cuenta un pre-esfuerzo en el eje longitudinal de la arteria.

2.2. El flujo sanguíneo

La sangre es una solución compuesta por un 45% de elementos sólidos, (glóbulos rojos, glóbulos blancos y plaquetas), y del 55% de agua, lo que hace que la sangre sea cinco veces más viscosa que el agua, y el hecho de que haya mayor cantidad de agua en este compuesto hace que la sangre se considere un flujo incompresible, y es necesario considerar estas características a la hora de realizar el modelado numérico del flujo sanguíneo [11].

Las principales cantidades que describen el flujo sanguíneo son la velocidad u y la presión. Para el cómputo numérico unas de las principales dificultades que se presentan son las siguientes:

El flujo es transitorio. - El flujo sanguíneo es pulsátil, esto es depende del tiempo, y sabiendo entonces que es pulsátil, se aproxima el comportamiento como un fenómeno armónico. El ciclo de este movimiento armónico se compone de dos partes:

- La apertura de las valvas aórticas, con la correspondiente eyección de fluido, que corresponde a la sístole y es donde se encuentra el máximo del flujo.
- La diástole que corresponde a la contracción de las valvas aórticas con el mínimo del flujo.

Interacción del fluido con la pared arterial. - En las arterias mayores este aspecto es importante. Por ejemplo, en la aorta la fuerza ejercida por el flujo sobre la pared arterial produce un desplazamiento de entre un 5% y un 10% en la diástole y la sístole respectivamente [12]. Este es un desplazamiento significativo, ya que éste afecta al fluido. La interacción permite también la propagación de la onda del pulso de presión. Una observación obvia pero importante es que la

carencia en el desplazamiento de la pared arterial indicaría:

- 1) Falta de presión en el flujo sanguíneo, y
- 2) Rigidez en la pared arterial.

2.2.1. El modelo del flujo sanguíneo

Una cuestión que debe ser considerada a la hora de pretender hacer un modelo es el incremento en el radio de la arteria, el cual puede variar hasta en un 10 %, debido a las fuerzas ejercidas por el flujo sanguíneo. Cuando el flujo interactúa con una porción de arteria se calcula la solución del flujo en un dominio computacional, Ω_t , que varía con el tiempo, como se ilustra en la figura 1, en la cual, Las paredes Γ_t^w están moviéndose, mientras que la sección correspondiente a la entrada y la salida, Γ_t^{in} y Γ_t^{out} , permanecen fijas.

La frontera Ω_t se divide en dos partes. La primera parte coincide con las fronteras físicas del fluido, i.e., la pared arterial. Que se denotan por Γ_t^w y que son las que se mueven bajo la acción del fluido. La otra parte denotada por $\partial\Omega_t$ corresponde a fronteras ficticias o artificiales, las cuales delimitan la región de interés.

En el caso del presente trabajo, estas entradas ficticias son la entrada y salida del fluido de la sección de la arteria a estudiar, y están indicadas por Γ_t^{in} y Γ_t^{out} .

El problema queda planteado entonces:

Sea el dominio del fluido $\Omega \in \mathcal{R}^3$. Dados $u_d(t)$, $t_n(t)$ y $u_o(x)$, encontrar un campo vectorial $u(x, t): \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}^3$ y un campo escalar $p(x, t): \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$ tales que:

$$\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot D = 0.$$

Existen numerosos esquemas utilizados para la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes, Váldez [4], por ejemplo, propone el método α -generalizado de pasos fraccionarios para la convergencia de las ecuaciones; por otro lado, Quarteroni [10], implementa el esquema de Yosida para el mismo fin. En este trabajo se usa el esquema de Chorin-Temam.

Para solucionar la interacción entre la estructura y el fluido se usa el método ALE, el cual consiste en agregar un dominio de referencia

Tabla 1. Propiedades de la pared arterial

Pared Arterial	Unidades	Dominio 1
Densidad (ρ)	[Kg/m ³]	960
Diámetro(d)	cm	2.5
Espesor	cm	.27
Modelo del Material		Hiperelástico
Esfuerzo Cortante Inicial (μ)	Pa	6204106
Esfuerzo Total (κ)	Pa	20*6204106

Tabla 2. Estadística de la Malla

Número de grados de libertad	12948
Número de puntos de malla	4316
Número de elementos	18447
Elementos tetraédricos	18447
Elementos tipo prisma	0
Número de elementos de contorno	3924
Elementos triangulares	3924
Elementos tipo cuadrilátero	0

extra al dominio material, propio de la formulación lagrangiana, y al dominio espacial, propio de la formulación euleriana.

2.3. Construcción del modelo

2.3.1. La pared arterial

La geometría. - Una sección de arteria sana cuenta con las características mostradas en la

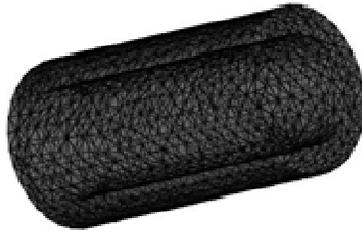


Fig. 2. Mallado de la pared arterial

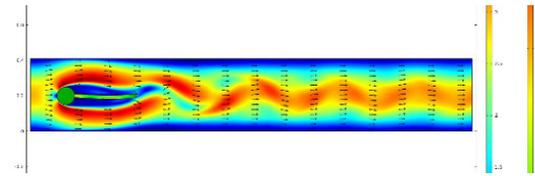


Fig. 3. Campo de velocidades y esfuerzos de Von Mises

Tabla 3. Propiedades del flujo sanguíneo

Flujo Sanguíneo	Unidades	Dominio 2
Densidad (ρ)	[Kg/m ³]	1060
Modelo del Material		Flujo laminar incompresible
Viscosidad	[Ns/m ²]	.005
Presión de entrada	[Pa]	11000
Presión de salida	[Pa]	0

tabla 1, según la American Heart Association, y que son las que se usaron en el modelo implementado en presente trabajo, con una longitud de 5cm.

Ecuaciones dictaminantes.- En el caso de la pared arterial, la conservación de momentum genera el sistema de ecuaciones dictaminantes que resuelven el problema desde un punto de vista mecánico:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i d\Omega_0 \\ & = \int_{\Omega_0} \delta u_i \rho_0 b_i d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \delta u_i t_i^{-o} d\Gamma_0, \end{aligned} \quad (4)$$

donde la primer integral representa el trabajo interno y δE_{ij} es la variación del tensor de deformación de Green-Lagrange, S_{ij} es el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff y Ω_0 es el dominio de análisis de la arteria. La segunda integral representa el trabajo cinético o inercial donde δu_i es el vector de los

desplazamientos virtuales y \ddot{u}_i es la aceleración. El lado derecho de la ecuación 4 se denomina trabajo externo donde el término t_i^{-o} hace referencia a las fuerzas superficiales que actúan sobre la estructura.

En la tabla 2, se muestran las características utilizadas para la generación del modelo simulado en elemento finito.

En la figura 2 se muestra el mallado del modelo generado.

En la figura 3 se muestran los campos de velocidades y esfuerzos de Von Mises.

2.3.2. El flujo sanguíneo

Las propiedades físicas de la sangre que se usaron en el modelo se muestran en la tabla 3.

Ecuaciones dictaminantes.- El sistema a resolver surge tanto de la ecuación de conservación de momentum como de continuidad, dadas en la forma mostrada en la ecuación 5:

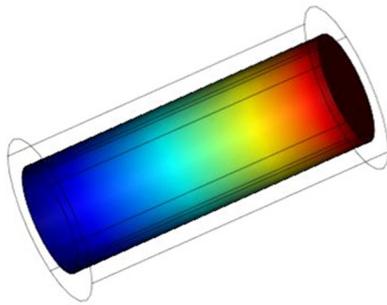


Fig. 4. Presión del flujo sanguíneo

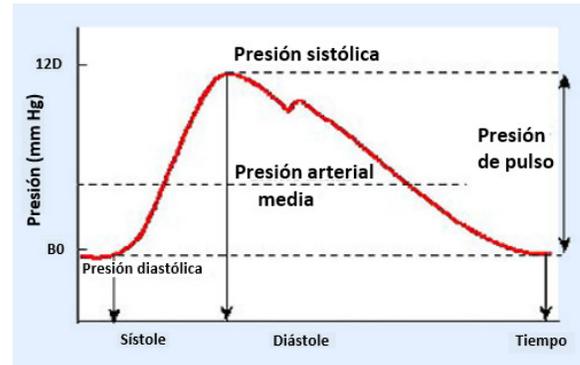


Fig. 5. Presión del flujo sanguíneo

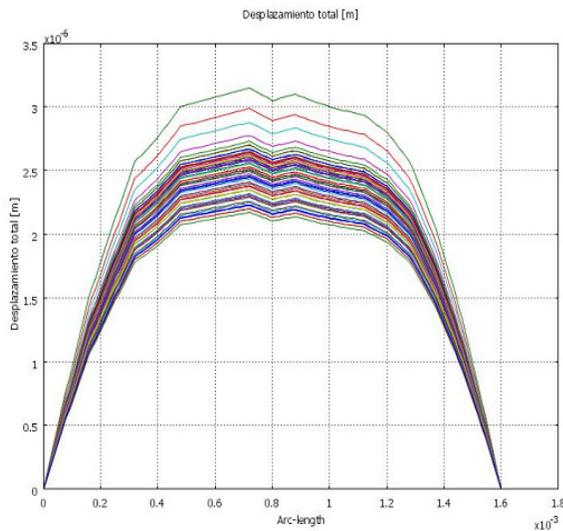


Fig. 6. Desplazamiento de la pared arterial 1D

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_f b_i, \quad (5)$$

$$V_{ij} = 0, \quad (6)$$

A partir de la cual se desarrolla la formulación euleriana usada en la dinámica de fluidos. Para poder resolver el sistema anterior se "debilita" multiplicándola por una función de prueba e integrándolo, quedando de la manera presentada en las Ec. 7 y 8.

Cabe mencionar que son las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible y en donde se utilizan las condiciones homogéneas de contorno de Dirichlet:

$$\int_{\Omega} \delta v_i \left(\rho_f \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho_f v_j \partial_j v_i \right) d\Omega - \int_{\Omega} P \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} \delta v_i \rho_f b_i d\Omega \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} \delta P \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = 0. \quad (8)$$

2.4. Resultados

La función de impulso es una función senoidal, obtenida de Vasava [13], que toma la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi(t - \frac{1}{2})) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{3s}{2} \end{cases}$$

Las presiones alcanzadas se visualizan en 3D en la figura 4.

Las presiones alcanzan un máximo de hasta 16,500 pascales esto es 123.76 mmHg y con un mínimo de 10,500 pascales equivalentes a 78.75 mmHg que son las que se reportan en la clínica para una persona sana en promedio, La curva de presión entonces se muestra en la figura 5.

En la figura 6 se muestra el desplazamiento de la pared arterial obtenida como resultado del modelo implementado. Se puede apreciar la similitud cualitativa con la curva de presión reportada en la clínica, se distingue la onda dicrota, para la cual hasta el momento no hay consenso de su origen, pero que es evidente en los experimentos que se trata de un rebote de la elasticidad de la arteria y no un refluo por vacío o un rebote por el choque con la bifurcación de la arteria.

3. Conclusiones

El flujo sanguíneo se considera un flujo laminar, incompresible y que cumple con las condiciones de no deslizamiento en las paredes de la arteria, encontrando con esto las presiones reportadas en la clínica y además la forma de la curva de presión es cualitativamente similar a la reportada en la literatura médica.

Se utiliza el método de los elementos finitos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el esquema de Chorin-Temam y con las condiciones iniciales y de frontera propios del flujo sanguíneo para una persona en promedio sana, para la pared arterial se propone el modelo de Ogden con las propiedades reportadas en la literatura especializada, para una persona sana en promedio.

La interacción entre el fluido y la pared arterial se resuelve mediante el método ALE, obteniendo con todo lo anterior una curva de presión cualitativa y cuantitativamente similar a la encontrada en la clínica, esto es, las presiones calculadas corresponden a las presiones reportadas en la clínica y se observa claramente en la forma de la onda depresión dicrota que caracteriza a la onda de presión y que se relaciona con la rigidez de la arteria, es decir, la magnitud y la forma de la incisura dicrota indica de manera directa el estado de salud de la arteria.

Los resultados obtenidos proporcionan visualizaciones de diferentes escenarios clínicos, proporcionando así una herramienta de comprensión del fenómeno para cada caso. Mediante esta simulación se resalta entonces la importancia de la hipótesis sobre que el origen de

la onda dicrota radica en la naturaleza elástica de la pared arterial. Un modelo de interacción unidimensional resuelto de forma monolítica tiene un bajo coste computacional y se puede usar para acoplarlo a los modelos tridimensionales de las arterias en el extremo final.

Referencias

1. **Womerley, J. R. (1995).** Flow in the large arteries and its relation to the oscillating pressure. *Journal of Physiology*.
2. **Chen, H. Y. H. & Sheu, T. W. H. (2003).** Finite element simulation of incompressible fluid flow in an elastic vessel. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids* 42, pp. 131–146, DOI: 10.1002/flid.464.
3. **Formaggia, L., Lamponi, D., & Quarteroni, A. (2003).** One dimensional models for blood flow in arteries. *Journal of Engineering Mathematics* 47, DOI: 10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29.
4. **Valdés, J. G., Castro, J., & Córdova, T. (2009).** *Bio-Ingeniería Computacional en el Estudio de la Hemodinámica y su Interacción con Arterias*. Acta Universitaria.
5. **Ogden, R. W. (2004).** Fitting hyperelastic model to experimental data. *Computational Mechanics*, DOI: 10.1007/s00466-004-0593-y.
6. **Chen, H. Y. H. & Sheu, T. W. H. (2003).** Finite-element simulation of incompressible fluid flow in an elastic vessel. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, DOI: 10.1002/flid.464.
7. **Quarteroni, A. & Rozza, G. (2003).** Optimal control and shape optimization of aorto-coronary bypass anastomoses. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, Vol. 13, No. 12, pp. 1801–1823, DOI: 10.1142/S0218202503003124.
8. **Yamaguchi, T. (2000).** Computational mechanics simulations for clinical cardiovascular medicine. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
9. **Koop, B. E. & Lewis, J. L. (2003).** A model of fracture testing of soft viscoelastic tissues. *Journal of Biomechanics*, 36, 605–608, DOI: 10.1016/S0021-9290(02)00435-9.
10. **Quarteroni, A. & Rozza, G. (2007).** Numerical solution of parametrized Navier-Stokes equations by reduced basis methods. *Numerical Methods Partial Differential Equations*, Vol. 23, No. 4, DOI: 10.1002/num.20249.
11. **Sheu, T. W. H. & Chen, H. Y. H. (1999).** A transient analysis of incompressible fluid flow in

vessels with moving boundaries. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, DOI: 10.1108/09615539910297905.

12. **Pierre Yves L. (2000)**. An inverse technique to deduce the elasticity of a large artery. *Europe Journal Physics*, DOI: 10.1051/epjap:2000213.
13. **Vasava, P., Jalali, P., Dabagh, M., & Kolari, P. (2012)**. Finite element modelling of pulsatile blood

flow in idealized model of human aortic arch: Study of hypotension and hypertension. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, DOI: 10.1155/2012/861837.

*Artículo recibido el 11/10/2016; aceptado el 02/11/2016.
Autor de correspondencia es Rafael Guzmán-Cabrera.*