

# Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1

Francisco Velázquez Santillán, Arnulfo Luévanos Rojas, Sandra López Chavarría,  
Manuel Medina Elizondo

Universidad Autónoma de Coahuila,  
Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria,  
México

{frankv2010, arnulfol\_2007, sandylopez5}@hotmail.com, drmanuelmediana@yahoo.com.mx

**Resumen.** Este trabajo presenta un modelo matemático para traves rectangulares con variación parabólica en la altura (objeto del trabajo) bajo una carga uniformemente distribuida tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez. Las propiedades de la sección transversal rectangular de la viga varían a lo largo de su eje “ $x$ ”, es decir, el ancho “ $b$ ” es constante y la altura “ $h$ ” varía a lo largo de la viga, esta variación es de tipo parabólico. Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio se utilizan para resolver este tipo de problemas, y las deformaciones en cualquier lugar de la viga se encuentran por medio del principio del trabajo virtual a través de integraciones exactas utilizando el software “Derive” para obtener algunos resultados. El modelo tradicional considera las deformaciones por flexión solamente. Además de la eficacia y la precisión del modelo desarrollado, una ventaja significativa es que los momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez se calculan para cualquier sección transversal rectangular de la viga usando la ecuación matemática presentada en este documento, que es la parte principal de esta investigación.

**Palabras clave.** Miembros rectangulares, cartelas parabólicas, deformaciones por flexión y cortante, momentos de empotramiento, factores de transporte y rigidez.

## Modeling for Beams of Rectangular Cross Section with Parabolic Haunches: Part 1

**Abstract.** This paper presents a mathematical model for rectangular beams with parabolic variation in the height (work object) under a uniformly distributed load taking into account the bending and shear

deformations to obtain the fixed-end moments, carry-over factors and stiffness factors. The properties of the rectangular cross section of the beam vary along its axis “ $x$ ”, i.e., the width “ $b$ ” is constant and the height “ $h$ ” varies along the beam, this variation is parabolic type. The compatibility equations and equilibrium are used to solve such problems, and the deformations anywhere of beam are found by means of the virtual work principle through exact integrations using the software “Derive” to obtain some results. The traditional model considers only bending deformations. Besides the effectiveness and accuracy of the developed models, a significant advantage is that fixed-end moments, carry-over factors and stiffness factors are calculated for any rectangular cross section of the beam using the mathematical equation presented in this paper, which is the main part of this research.

**Keywords.** Rectangular members, parabolic haunches, bending and shear deformations, fixed-end moments, carry-over and stiffness factors.

## 1. Introducción

Las traves con cartelas de concreto reforzado se distinguen de las prismáticas porque tienen una variación gradual del peralte en toda o parte de su longitud. Su aplicación en edificios de elevación moderada, así como en puentes y viaductos de diversas funciones.

Uno de los principales problemas en el análisis de estructuras con momento de inercia variable a lo largo de su longitud es encontrar los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transporte.

A mediados del siglo pasado se desarrollaron varias ayudas de diseño por Guldán y Portland Cement Association (PCA) [1, 2]. En estas tablas

las deformaciones por cortante se despreciaron, así como la relación claro-peralte de la viga en la definición de los diversos factores de rigidez.

Posteriormente a las publicaciones de las ayudas de diseño. Existen contribuciones importantes en el análisis de elementos de sección variable que se basan en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli [3-6].

Las nuevas ayudas de diseño para substituir a las antiguas tablas de la PCA, se encuentran en el apéndice B de Tena-Colunga [7]. Pero estas tablas se presentan para secciones "T" e "I" y se limitan a ciertas relaciones, y la altura de las cartelas son iguales en los dos extremos.

En estudios recientes son: Shooshtari y Khajavi propusieron las funciones de forma y matrices de rigidez de los elementos de vigas no prismáticas para las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko [8]. Yuksel realizó un estudio para investigar el comportamiento de vigas no prismáticas con cartelas parabólicas simétricas que tienen la relación longitud de cartela constante de 0.5 utilizando análisis de elementos finitos debido a cargas verticales, para obtener los coeficientes de rigidez y de los factores de transporte [9].

Otros investigadores han presentado modelos matemáticos para vigas de sección rectangular variable de forma lineal o parabólica y simétrica en sus acartelamientos, y bajo carga uniformemente distribuida y/o carga concentrada [10-14], pero las deformaciones por cortante no se consideran. Luévanos-Rojas propuso un modelo matemático para vigas de sección transversal "I" con cartelas rectas para el caso general (simétricas y/o no simétricas) sujetas a una carga uniformemente distribuida tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez, y la metodología se presenta por el método de deformación consistente y las rotaciones se obtienen por el método de la viga conjugada [15]. Luévanos-Soto y Luévanos-Rojas propusieron un modelo matemático para vigas de sección transversal "I" con cartelas rectas para el caso general (simétricas y/o no simétricas) sujetas a una carga concentrada localizada en cualquier posición sobre la viga considerando las deformaciones por flexión y cortante para obtener

los momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez, y la metodología se presenta utilizando las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio, y las rotaciones se obtienen por el principio del trabajo virtual [16].

Luévanos-Rojas *et al.* presentaron dos modelos matemáticos para vigas de sección transversal rectangular con cartelas rectas para el caso general (simétricas y/o no simétricas), un para carga uniformemente distribuida, y otro para carga concentrada, ambos modelos tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez, y la metodología se presenta por el método de deformación consistente y las rotaciones se obtienen por el método de la viga conjugada [17, 18].

Los métodos tradicionales toman en cuenta las deformaciones por flexión y las deformaciones por cortante se desprecian [19-21].

Este documento presenta un modelo matemático para vigas de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas (simétricas o no simétricas) sujetas a una carga uniformemente distribuida tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez, que es la novedad de esta investigación. Las propiedades de la sección transversal rectangular de la viga varían a lo largo de su eje "x", es decir, el ancho "b" es constante y la altura "h" varía a lo largo de la viga en tres partes diferentes, las partes extremas tienen una variación parabólica, y la parte central es constante.

Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio se utilizan para resolver este tipo de problemas, y las deformaciones en cualquier parte de la viga se encuentran por medio del principio del trabajo virtual mediante la integración exacta para obtener los momentos de empotramiento. Los factores de transporte y factores de rigidez se obtienen por medio de la matriz de rigidez a partir de la formulación de la matriz de flexibilidades.

Algunos resultados se obtienen usando el software "Derive". También una comparación se realiza entre el modelo tradicional y el modelo propuesto para observar las diferencias.

## 2. Modelo propuesto

### 2.1. Propiedades generales de la sección transversal

La Figura 1 muestra una viga en elevación y también presenta su sección transversal rectangular tomando en cuenta el ancho “ $b$ ” es constante y la altura “ $h_x$ ” varia a lo largo de su eje “ $x$ ” de forma parabólica en tres partes diferentes.

Tabla 1 muestra las ecuaciones de las alturas “ $h_x$ ” y las áreas de cortante “ $A_{sx}$ ” a una distancia “ $x$ ”, y los momentos de inercia “ $I_z$ ” alrededor del eje “ $z$ ” para cada tramo.

### 2.2. Momentos de empotramiento para una carga uniformemente distribuida

En la Figura 2(a) se presenta la viga “AB” sujeta a una carga uniformemente distribuida y empotrada en sus extremos. Los momentos de empotramiento en sus extremos se encuentran mediante la suma de los efectos. Los momentos se consideran positivos, cuando giran en sentido antihorario y negativo cuando giran en sentido horario. En la Figura 2(b) se observa la misma viga simplemente apoyada en sus extremos bajo la carga aplicada para encontrar las rotaciones “ $\theta_A$ ” y “ $\theta_B$ ”. Ahora, las rotaciones “ $f_{11}$ ” y “ $f_{21}$ ” son causados por un momento unitario aplicado en el soporte “A”, según la Figura 2(c), y en cuanto a “ $f_{12}$ ” y “ $f_{22}$ ” son causados por el momento unitario aplicado en el soporte “B”, esto se observa en la Figura 2(d) [10-15].

Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio para la viga son [22-24]:

$$-f_{11}M_{AB} + f_{12}M_{BA} = \theta_A, \tag{1}$$

$$-f_{21}M_{AB} + f_{22}M_{BA} = \theta_B. \tag{2}$$

La viga de la Figura 2(b) es analizada para encontrar “ $\theta_A$ ” y “ $\theta_B$ ”, el principio del trabajo virtual y tomando en cuenta las deformaciones de

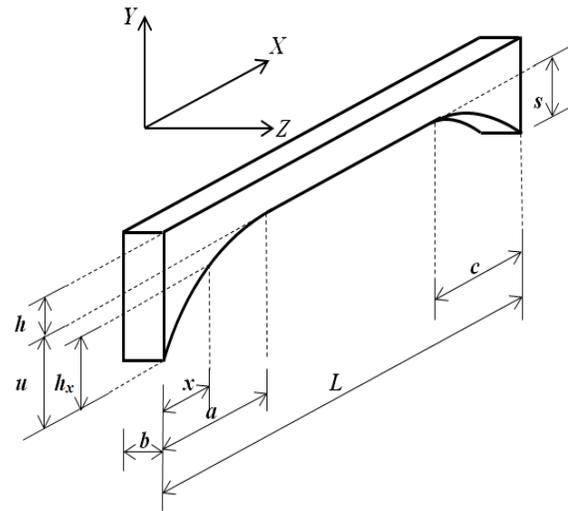


Fig. 1. Sección transversal rectangular con cartelas parabólicas

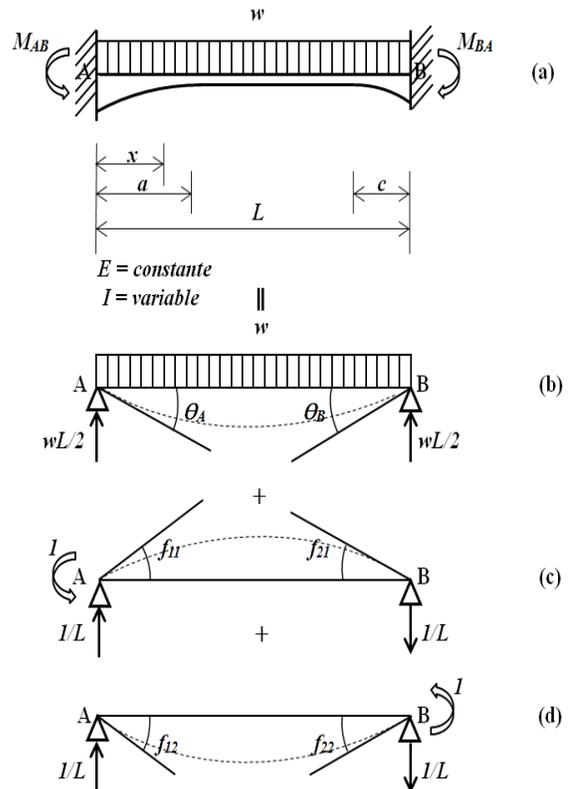


Fig. 2. Viga doblemente empotrada bajo carga uniformemente distribuida

**Tabla 1.** Propiedades de la sección rectangular

Concepto	Ecuaciones			
	Intervalo	$0 \leq x \leq a$	$a \leq x \leq L$ $-c$	$L-c \leq x \leq L$
$h_x$		$\frac{a^2 h + u(x-a)^2}{a^2}$	$h$	$\frac{c^2 h + s(x-L+c)^2}{c^2}$
$A_{sx}$		$\frac{5b[a^2 h + u(x-a)^2]}{6a^2}$	$\frac{5bh}{6}$	$\frac{5b[c^2 h + s(x-L+c)^2]}{6c^2}$
$I_z$		$\frac{b[a^2 h + u(x-a)^2]^3}{12a^6}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b[c^2 h + s(x-L+c)^2]^3}{12c^6}$

**Tabla 2.** Fuerzas cortantes y momentos

Concepto	Ecuaciones		
Fuerza cortante	$V_x = \frac{w(L-2x)}{2}$	$V_1 = \frac{1}{L}$	$V_2 = \frac{1}{L}$
Momento	$M_x = \frac{wx(L-x)}{2}$	$M_1 = -\frac{(L-x)}{L}$	$M_2 = \frac{x}{L}$

flexión y cortante se utiliza para obtener las rotaciones.

Ahora los valores de “ $\Theta_A$ ” y “ $\Theta_B$ ” para los miembros no prismáticos se encuentran por las siguientes ecuaciones [7]:

$$\Theta_A = \int_0^L \frac{V_x V_1}{GA_{sx}(x)} dx + \int_0^L \frac{M_x M_1}{EI_z(x)} dx, \quad (3)$$

$$\Theta_B = \int_0^L \frac{V_x V_2}{GA_{sx}(x)} dx + \int_0^L \frac{M_x M_2}{EI_z(x)} dx, \quad (4)$$

donde:  $E$  es el módulo de elasticidad,  $G$  es el módulo de cortante,  $V_x$  y  $M_x$  son la fuerza cortante y el momento de la carga real,  $V_1$  y  $M_1$  son la fuerza cortante y el momento debido al momento unitario aplicado en el apoyo “A”,  $V_2$  y  $M_2$  son la fuerza cortante y el momento debido al momento unitario aplicado en el apoyo “B” a una distancia “ $x$ ”.

Tabla 2 presenta las ecuaciones de las fuerzas cortantes y los momentos en cualquier parte de la viga sobre el eje “ $x$ ” son [25].

Sustituyendo los valores de las Tablas 1 y 2 en las ecuaciones (3) y (4) para obtener las rotaciones de “ $\Theta_A$ ” y “ $\Theta_B$ ”, estas se muestran de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Theta_A &= \frac{3w}{5bGL} \left[ \frac{a(L-2a)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{u}{h}\right)^{1/2} + \frac{a^2}{u} \ln\left(\frac{h+u}{h}\right) + (a-c)(a+c-L) \right. \\ &\quad \left. - \frac{c(L-2c)}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{s}{h}\right)^{1/2} - \frac{c^2}{s} \ln\left(\frac{h+s}{h}\right) \right] \\ &\quad - \frac{6w}{bh^2EL} \left[ \frac{a^2[ah(3a-2L)+3u(a-L)^2]}{8h^{3/2}u^{3/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} - \frac{a^3(3a-2L)}{8u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2L^2}{8(h+u)} + \frac{(L-a)^3(L+3a)}{12h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^3[(h+3s)L-3c(h+s)]}{8h^{3/2}s^{3/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{s}{h}\right)^{3/2} + \frac{c^3(3c-4L)}{12h} - \frac{c^3(L-3c)}{8s} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Theta_B &= \frac{3w}{5bGL} \left[ \frac{a(L-2a)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{u}{h}\right)^{1/2} + \frac{a^2}{u} \ln\left(\frac{h+u}{h}\right) + (a-c)(a+c-L) \right. \\ &\quad \left. - \frac{c(L-2c)}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{s}{h}\right)^{1/2} - \frac{c^2}{s} \ln\left(\frac{h+s}{h}\right) \right] \\ &\quad + \frac{6w}{bh^2EL} \left[ \frac{a^3[(h+3u)L-3a(h+u)]}{8h^{3/2}u^{3/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} - \frac{a^3(L-3a)}{8u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^3(3a-4L)}{12h} + \frac{c^2[ch(3c-2L)+3s(c-L)^2]}{8h^{1/2}s^{3/2}} \operatorname{Atan}\left(\frac{s}{h}\right)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^3(3c-2L)}{8s} + \frac{c^2L^2}{8(h+s)} + \frac{(L-c)^3(L+3c)}{12h} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Los coeficientes de flexibilidades mediante el principio del trabajo virtual se obtienen [7]:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{V_1 V_1}{GA_{sx}(x)} dx + \int_0^L \frac{M_1 M_1}{EI_z(x)} dx, \quad (7)$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{V_2 V_2}{GA_{sx}(x)} dx + \int_0^L \frac{M_2 M_2}{EI_z(x)} dx, \quad (8)$$

$$f_{12} = f_{21} = \int_0^L \frac{V_1 V_2}{GA_{sx}(x)} dx + \int_0^L \frac{M_1 M_2}{EI_z(x)} dx. \quad (9)$$

Ahora, los valores de las Tablas 1 y 2 se sustituyen en las ecuaciones (7) (8) y (9) para obtener los coeficientes de flexibilidades para “ $f_{11}$ ”, “ $f_{22}$ ” y “ $f_{12}$ ”, estas se presentan como sigue:

$$f_{11} = \frac{6}{5bh^2L^2G} \left[ \frac{a}{u^2} Atan\left(\frac{u}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c}{s^2} Atan\left(\frac{s}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{(L-a-c)}{h^2} \right] + \frac{12}{Ebh^2L^2} \left[ \frac{a^3h+3au(L-a)^2}{8h^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}} Atan\left(\frac{u}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c^3(h+3s)}{8h^{\frac{1}{2}}s^{\frac{3}{2}}} Atan\left(\frac{s}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{8us[(L-a)^3-c^3]-3h(a^3s+c^3u)}{24hus} - \frac{aL[2a(h+u)-L(5h+3u)]}{8(h+u)^2} \right], \quad (10)$$

$$f_{22} = \frac{6}{5bh^{1/2}L^2G} \left[ \frac{a}{u^2} Atan\left(\frac{u}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c}{s^{1/2}} Atan(s/h)^{1/2} + \frac{(L-a-c)}{h^{1/2}} \right] + \frac{12}{Ebh^2L^2} \left[ \frac{a^3(h+3u)}{8h^{1/2}u^{3/2}} Atan\left(\frac{u}{h}\right)^{1/2} + \frac{c^3h+3cs(L-c)^2}{8h^{1/2}s^{3/2}} Atan\left(\frac{s}{h}\right)^{1/2} + \frac{8us[(L-c)^3-a^3]-3h(a^3s+c^3u)}{24hus} - \frac{cL[2c(h+s)-L(5h+3s)]}{8(h+s)^2} \right], \quad (11)$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{6}{5bh^{1/2}L^2G} \left[ \frac{a}{u^{1/2}} Atan\left(\frac{u}{h}\right)^{1/2} + \frac{c}{s^{1/2}} Atan\left(\frac{s}{h}\right)^{1/2} + \frac{(L-a-c)}{h^{1/2}} \right] - \frac{12}{Ebh^2L^2} \left[ \frac{a^2[3u(L-a)-ah]}{8h^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}} Atan\left(\frac{u}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c^2[3s(L-c)-ch]}{8h^{\frac{1}{2}}s^{\frac{3}{2}}} Atan\left(\frac{s}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{(L-c)^2(L+2c)+a^2(2a-3L)}{8us} + \frac{a^3s+c^3u}{8us} + \frac{a^2L}{8(h+u)} + \frac{6h}{8(h+s)} \right]. \quad (12)$$

Las ecuaciones (5, 10 y 12) correspondientes al apoyo “A” se sustituyen en la ecuación (1), y las ecuaciones (6, 11 y 12) correspondientes al apoyo “B” se sustituyen en la ecuación (2). Subsecuentemente, las ecuaciones generadas se resuelven para obtener los valores de “ $M_{AB}$ ” y “ $M_{BA}$ ”. Estas se presentan como sigue:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_{A1} - f_{12}\theta_{B1}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (13)$$

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_{A1} - f_{11}\theta_{B1}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}. \quad (14)$$

### 3. Factor de transporte y rigidez

El factor de transporte y rigidez se encuentran a partir de la matriz de rigidez. La matriz de rigidez se obtiene invirtiendo la matriz de flexibilidades.

La matriz básica de flexibilidades para miembros de sección variable bidimensional tomando en cuenta los grados de libertad globales para giros es:

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

La matriz de rigidez asociada a un sistema de coordenadas bidimensional es:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

La inversa de la matriz de flexibilidades es:

$$[f]^{-1} = [K] = \begin{bmatrix} \frac{f_{22}}{(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2} & -\frac{f_{12}}{(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2} \\ -\frac{f_{12}}{(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2} & \frac{f_{11}}{(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Tabla 3. Factores para momentos de empotramiento

c	s/h	Factores de momentos de empotramiento para h = 0.10L						Factores de momentos de empotramiento para h = 0.20L					
		m <sub>AB</sub>			m <sub>AB</sub>			m <sub>AB</sub>			m <sub>AB</sub>		
		MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT
a = 0.2L; u/h = 1.0													
0.2L	0.4	0.1020	0.1022	0.9980	0.0843	0.0841	1.0024	0.1016	0.1022	0.9941	0.0847	0.0841	1.0071
	0.6	0.0994	0.0995	0.9990	0.0888	0.0887	1.0011	0.0992	0.0995	0.9970	0.0890	0.0887	1.0034
	1.0	0.0955	0.0955	1.0000	0.0955	0.0955	1.0000	0.0955	0.0955	1.0000	0.0955	0.0955	1.0000
	1.5	0.0923	0.0922	1.0011	0.1013	0.1014	0.9990	0.0925	0.0922	1.0033	0.1012	0.1014	0.9980
	2.0	0.0900	0.0899	1.0011	0.1054	0.1056	0.9981	0.0903	0.0899	1.0044	0.1051	0.1056	0.9953
0.3L	0.4	0.1001	0.1002	0.9990	0.0879	0.0878	1.0011	0.0997	0.1002	0.9950	0.0883	0.0878	1.0057
	0.6	0.0966	0.0966	1.0000	0.0942	0.0942	1.0000	0.0965	0.0966	0.9990	0.0943	0.0942	1.0011
	1.0	0.0912	0.0911	1.0011	0.1040	0.1041	0.9990	0.0915	0.0911	1.0044	0.1038	0.1041	0.9971
	1.5	0.0865	0.0862	1.0035	0.1129	0.1132	0.9973	0.0870	0.0862	1.0093	0.1123	0.1132	0.9920
	2.0	0.0831	0.0827	1.0048	0.1194	0.1198	0.9967	0.0839	0.0827	1.0145	0.1185	0.1198	0.9891
a = 0.5L; u/h = 1.0													
0.2L	0.4	0.1212	0.1216	0.9967	0.0755	0.0752	1.0040	0.1202	0.1216	0.9885	0.0762	0.0752	1.0133
	0.6	0.1180	0.1183	0.9975	0.0799	0.0796	1.0038	0.1173	0.1183	0.9915	0.0804	0.0796	1.0101
	1.0	0.1132	0.1133	0.9991	0.0864	0.0863	1.0012	0.1129	0.1133	0.9965	0.0867	0.0863	1.0046
	1.5	0.1091	0.1091	1.0000	0.0921	0.0921	1.0000	0.1091	0.1091	1.0000	0.0922	0.0921	1.0011
	2.0	0.1062	0.1062	1.0000	0.0962	0.0962	1.0000	0.1064	0.1062	1.0019	0.0960	0.0962	0.9979
0.5L	0.4	0.1167	0.1171	0.9966	0.0815	0.0811	1.0049	0.1156	0.1171	0.9872	0.0823	0.0811	1.0148
	0.6	0.1113	0.1116	0.9973	0.0892	0.0889	1.0034	0.1106	0.1116	0.9910	0.0898	0.0889	1.0101
	1.0	0.1025	0.1025	1.0000	0.1025	0.1025	1.0000	0.1025	0.1025	1.0000	0.1025	0.1025	1.0000
	1.5	0.0941	0.0937	1.0043	0.1159	0.1163	0.9966	0.0948	0.0937	1.0117	0.1151	0.1163	0.9897
	2.0	0.0877	0.0870	1.0080	0.1267	0.1275	0.9937	0.0891	0.0870	1.0241	0.1251	0.1275	0.9812

$$M_{AB} = m_{AB}WL^2; M_{BA} = m_{BA}WL^2$$

Entonces los factores de transporte se expresan de la siguiente manera:

$$C_{AB} = \frac{f_{12}}{f_{22}}, \quad (18)$$

$$C_{BA} = \frac{f_{12}}{f_{11}}. \quad (19)$$

Por lo tanto, las rigideces de la viga son:

$$K_{AB} = k_{11} = \frac{f_{22}}{(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2}, \quad (20)$$

$$K_{BA} = k_{22} = \frac{f_{11}}{(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2}. \quad (21)$$

Si las rigideces se presentan de la siguiente forma:

$$K_{AB} = \frac{k_{AB}EI}{L}, \quad (22)$$

$$K_{BA} = \frac{k_{BA}EI}{L}, \quad (23)$$

dónde:  $k_{AB}$  y  $k_{BA}$  son los factores de rigidez, e  $I$  es el momento de inercia de la sección menor.

Por lo tanto, los factores de rigidez son:

$$k_{AB} = \frac{12Lf_{22}}{bh^3E[(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2]}, \quad (24)$$

$$k_{BA} = \frac{12Lf_{11}}{bh^3E[(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})^2]}. \quad (25)$$

Tabla 4. Factores de transporte

c	s/h	Factores de transporte para h = 0.10L						Factores de transporte para h = 0.20L					
		C <sub>AB</sub>			C <sub>AB</sub>			C <sub>AB</sub>			C <sub>AB</sub>		
		MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT
a = 0.2L; u/h = 1.0													
0.2L	0.4	0.5454	0.5575	0.9783	0.6132	0.6275	0.9772	0.5099	0.5575	0.9146	0.5717	0.6275	0.9111
	0.6	0.5693	0.5822	0.9778	0.6098	0.6239	0.9774	0.5319	0.5822	0.9136	0.5687	0.6239	0.9115
	1.0	0.6047	0.6186	0.9775	0.6047	0.6186	0.9775	0.5643	0.6186	0.9122	0.5643	0.6186	0.9122
	1.5	0.6346	0.6494	0.9772	0.6002	0.6140	0.9772	0.5917	0.6494	0.9111	0.5604	0.6140	0.9127
	2.0	0.6555	0.6710	0.9769	0.5970	0.6106	0.9777	0.6109	0.6710	0.9104	0.5577	0.6106	0.9134
0.3L	0.4	0.5744	0.5876	0.9775	0.6023	0.6164	0.9771	0.5361	0.5876	0.9124	0.5614	0.6164	0.9108
	0.6	0.6109	0.6252	0.9771	0.5952	0.6091	0.9772	0.5692	0.6252	0.9104	0.5550	0.6091	0.9112
	1.0	0.6669	0.6831	0.9763	0.5847	0.5982	0.9774	0.6201	0.6831	0.9078	0.5455	0.5982	0.9119
	1.5	0.7166	0.7345	0.9756	0.5756	0.5887	0.9777	0.6650	0.7345	0.9054	0.5373	0.5887	0.9127
	2.0	0.7526	0.7717	0.9752	0.5690	0.5819	0.9778	0.6975	0.7717	0.9038	0.5314	0.5819	0.9132
a = 0.5L; u/h = 1.0													
0.2L	0.4	0.4811	0.4923	0.9772	0.7864	0.8086	0.9725	0.4486	0.4923	0.9112	0.7231	0.8086	0.8943
	0.6	0.5025	0.5143	0.9771	0.7815	0.8033	0.9729	0.4681	0.5143	0.9102	0.7189	0.8033	0.8949
	1.0	0.5340	0.5468	0.9766	0.7741	0.7955	0.9731	0.4969	0.5468	0.9087	0.7126	0.7955	0.8958
	1.5	0.5607	0.5743	0.9763	0.7676	0.7887	0.9732	0.5213	0.5743	0.9077	0.7071	0.7887	0.8965
	2.0	0.5794	0.5935	0.9762	0.7629	0.7837	0.9735	0.5384	0.5935	0.9072	0.7032	0.7837	0.8973
0.5L	0.4	0.5402	0.5540	0.9751	0.7322	0.7534	0.9719	0.5001	0.5540	0.9027	0.6717	0.7534	0.8916
	0.6	0.5904	0.6063	0.9738	0.7091	0.7297	0.9718	0.5446	0.6063	0.8982	0.6503	0.7297	0.8912
	1.0	0.6748	0.6945	0.9716	0.6748	0.6945	0.9716	0.6185	0.6945	0.8906	0.6185	0.6945	0.8906
	1.5	0.7577	0.7813	0.9698	0.6453	0.6641	0.9717	0.6903	0.7813	0.8835	0.5913	0.6641	0.8904
	2.0	0.8228	0.8499	0.9681	0.6240	0.6422	0.9717	0.7462	0.8499	0.8780	0.5717	0.6422	0.8902

#### 4. Resultados

Las Tablas 3, 4 y 5 (ver Apéndice) muestran los resultados de los dos modelos, el modelo propuesto (MP) es el modelo matemático presentado en este documento, donde las deformaciones por flexión y cortante se consideran, y el modelo tradicional (MT) toma en cuenta solo las deformaciones por flexión.

La Tabla 3 presenta los factores de los momentos de empotramiento ( $m_{AB}$  y  $m_{BA}$ ) para una viga sometida a una carga uniformemente distribuida, la Tabla 4 muestra los factores de transporte ( $C_{AB}$  y  $C_{BA}$ ), y en la Tabla 5 aparecen los factores de rigidez ( $k_{AB}$  y  $k_{BA}$ ). Estas comparaciones se realizaron con  $G = 5E/12$  para concreto,  $a = 0.2L$  y  $u/h = 1.0$ , y para  $a = 0.5L$  y  $u/h = 1.0$ , estas proporciones se desarrollaron para  $h = 0.10L$  y  $h = 0.20L$ , debido a que estos valores se presentan en las Tablas de la página 516 del libro de Hibbeler [19].

Los resultados que muestran las Tablas de Hibbeler es el modelo tradicional que considera las deformaciones por flexión, y el modelo propuesto toma en cuenta las deformaciones por flexión y cortante.

Otra manera para validar el modelo propuesto es como sigue: sustituyendo " $a = c = 0L$ " o " $u = s = 0h$ " en las ecuaciones (13) y (14) para encontrar los momentos de empotramiento " $M_{AB} = M_{BA} = 0.0833wL^2 = wL^2/12$ ". Ahora, cuando " $a = c = 0L$ " o " $u = s = 0h$ " se sustituyen en las ecuaciones (18) y (19), y las deformaciones por cortante se desprecian para obtener los factores de transporte " $C_{AB} = C_{BA} = 0.5$ ". También en las ecuaciones (24) y (25) se sustituye " $a = c = 0L$ " o " $u = s = 0h$ ", y las deformaciones por cortante se desprecian para encontrar los factores de rigidez " $k_{AB} = k_{BA} = 4$ ", por lo tanto la rigidez es " $K_{AB} = K_{BA} = 4EI/L$ ". Los valores presentados anteriormente corresponden a una sección transversal constante.

Tabla 5. Factores de rigidez

c	s/h	Factores de rigidez para h = 0.10L						Factores de rigidez para h = 0.20L					
		k <sub>AB</sub>			k <sub>AB</sub>			k <sub>AB</sub>			k <sub>AB</sub>		
		MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT	MP	MT	MP/MT
a = 0.2L; u/h = 1.0													
0.2L	0.4	5.8886	6.0821	0.9682	5.2374	5.4042	0.9691	5.3898	6.0821	0.8862	4.8075	5.4042	0.8896
	0.6	6.0067	6.2129	0.9668	5.6086	5.7977	0.9674	5.4785	6.2129	0.8818	5.1241	5.7977	0.8838
	1.0	6.1863	6.4123	0.9648	6.1863	6.4123	0.9648	5.6126	6.4123	0.8753	5.6126	6.4123	0.8753
	1.5	6.3435	6.5873	0.9630	6.7066	6.9678	0.9625	5.7295	6.5873	0.8698	6.0489	6.9678	0.8681
	2.0	6.4561	6.7129	0.9617	7.0891	7.3771	0.9610	5.8132	6.7129	0.8660	6.3677	7.3771	0.8632
0.3L	0.4	5.8886	6.0821	0.9682	5.2374	5.4042	0.9691	5.3898	6.0821	0.8862	4.8075	5.4042	0.8896
	0.6	6.0067	6.2129	0.9668	5.6086	5.7977	0.9674	5.4785	6.2129	0.8818	5.1241	5.7977	0.8838
	1.0	6.1863	6.4123	0.9648	6.1863	6.4123	0.9648	5.6126	6.4123	0.8753	5.6126	6.4123	0.8753
	1.5	6.3435	6.5873	0.9630	6.7066	6.9678	0.9625	5.7295	6.5873	0.8698	6.0489	6.9678	0.8681
	2.0	6.4561	6.7129	0.9617	7.0891	7.3771	0.9610	5.8132	6.7129	0.8660	6.3677	7.3771	0.8632
a = 0.5L; u/h = 1.0													
0.2L	0.4	9.4235	9.8525	0.9565	5.7654	5.9990	0.9611	8.3631	9.8525	0.8488	5.1880	5.9990	0.8648
	0.6	9.6526	10.1125	0.9545	6.2070	6.4744	0.9587	8.5249	10.1125	0.8430	5.5515	6.4744	0.8575
	1.0	10.0039	10.5129	0.9516	6.9016	7.2256	0.9552	8.7711	10.5129	0.8343	6.1169	7.2256	0.8466
	1.5	10.3142	10.8677	0.9491	7.5341	7.9130	0.9521	8.9872	10.8677	0.8270	6.6259	7.9130	0.8373
	2.0	10.5381	11.1242	0.9473	8.0030	8.4242	0.9500	9.1428	11.1242	0.8219	7.0004	8.4242	0.8310
0.5L	0.4	9.4235	9.8525	0.9565	5.7654	5.9990	0.9611	8.3631	9.8525	0.8488	5.1880	5.9990	0.8648
	0.6	9.6526	10.1125	0.9545	6.2070	6.4744	0.9587	8.5249	10.1125	0.8430	5.5515	6.4744	0.8575
	1.0	10.0039	10.5129	0.9516	6.9016	7.2256	0.9552	8.7711	10.5129	0.8343	6.1169	7.2256	0.8466
	1.5	10.3142	10.8677	0.9491	7.5341	7.9130	0.9521	8.9872	10.8677	0.8270	6.6259	7.9130	0.8373
	2.0	10.5381	11.1242	0.9473	8.0030	8.4242	0.9500	9.1428	11.1242	0.8219	7.0004	8.4242	0.8310

$$K_{AB} = k_{AB}EI/L; K_{BA} = k_{BA}EI/L$$

Entonces el modelo propuesto en este documento es válido y no se limita para ciertas dimensiones o proporciones como algunos autores muestran, y también las deformaciones por flexión y cortante son consideradas.

## 5. Discusión

Tal como se aprecia en la Tabla 3, los factores en los momentos de empotramiento se vieron influenciados por el volumen de las cartelas en los extremos (volumen de la cartela A es  $abu/3$ , y el volumen de la cartela B es  $cbs/3$ ). A medida que se incrementa el volumen de las cartelas en el extremo "B" se observa un aumento en estos factores para el mismo apoyo y en el extremo "A" que es el apoyo opuesto se produce una disminución, esto es para los dos modelos.

Ahora de acuerdo a la comparación de ambos modelos, cuando el volumen de las cartelas es

mayor en un extremo se presenta un factor mayor en los momentos de empotramiento de este apoyo para el modelo tradicional y para el extremo opuesto el mayor es el modelo propuesto. También se observa que cuando las cartelas son simétricas no se afectan los momentos de empotramiento para los dos modelos. La mayor diferencia existe para " $h = 0.2L$ ", " $a = c = 0.5L$ ", " $u = h$ " y " $s = 2h$ ", siendo mayor el modelo propuesto en el apoyo "A" de 2.41% con respecto al modelo tradicional.

Los factores de transporte mostrados en la Tabla 4 se afectan por el volumen de las cartelas en los extremos. A medida que se incrementa el volumen de las cartelas en el extremo "B" se observa una disminución en estos factores para el apoyo "B" y en el extremo opuesto "A" se produce un incremento, esto es para ambos modelos. Ahora en cuanto a la comparación de los dos modelos se presenta que el modelo propuesto es menor en todos los casos con

respecto al modelo tradicional. La mayor diferencia existe para " $h = 0.2L$ ", " $a = c = 0.5L$ ", " $u = h$ " y " $s = 2h$ ", siendo el modelo propuesto en el soporte "A" de 0.878 veces el modelo tradicional.

Los factores de rigidez presentados en la Tabla 5, también se afectan por el volumen de las cartelas en los extremos. A medida que se incrementa el volumen de las cartelas se presenta un aumento de los factores en los dos extremos, esto es para los dos modelos.

Ahora en cuanto a la comparación de los dos modelos se observa que el modelo propuesto es menor en todos los casos con respecto al modelo tradicional. La mayor diferencia existe para " $h = 0.2L$ ", " $a = c = 0.5L$ ", " $u = h$ " y " $s = 2h$ ", siendo el modelo propuesto en el apoyo "B" de 0.7478 veces el modelo tradicional.

## 6. Conclusiones

En el presente trabajo se ha presentado una metodología analítica para evaluar los elementos mecánicos para vigas de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas (simétricas o no simétricas) sometidas a una carga uniformemente distribuida tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante, que ha permitido determinar con precisión los factores para momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez. Las propiedades de la sección transversal de la viga: el ancho " $b$ " es constante y la altura " $h$ " varía a lo largo de la viga en tres partes diferentes, con variación en los tramos extremos de tipo parabólico y el tramo central recto.

Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio se utilizaron para resolver este tipo de problema, y los giros en los extremos de la viga se encontraron por medio del principio del trabajo virtual empleando la integración exacta para obtener los factores para momentos de empotramiento. Los factores de transporte y factores de rigidez se encontraron por medio de la matriz de rigidez a través de la formulación de la matriz de flexibilidades. Los modelos tradicionales consideran únicamente las deformaciones por flexión.

Tal como se aprecia en los resultados, los factores para momentos de empotramiento,

factores de transporte y factores de rigidez se vieron influenciados por las deformaciones de cortante. Las diferencias mayores se presentan en los factores de transporte y factores de rigidez para claros cortos, siendo menor el modelo propuesto.

En cualquier tipo de estructura las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes están presentes; por lo tanto, aparecen las deformaciones de flexión y cortante. Entonces, el modelo propuesto que considera las deformaciones por flexión y cortante es más apropiado para el análisis estructural y también se ajusta más a las condiciones reales con respecto al modelo tradicional que toma en cuenta las deformaciones por flexión únicamente.

La aplicación significativa de los momentos de empotramiento y las rigideces de un miembro es en los métodos matriciales de análisis estructural. Los momentos de empotramiento, el factor de transporte y el factor rigidez se utilizan en el método de distribución de momentos (Método de Hardy Cross).

Además, una ventaja significativa es que se pueden generar un gran número de Tablas para diferentes valores de " $G$ ", y proporciones de " $a/L$ ", " $c/L$ ", " $h/L$ ", " $u/h$ " y " $s/h$ " con ayuda de algún tipo de software.

Las sugerencias para investigaciones futuras: 1) Cuando el miembro presenta otro tipo de sección transversal; 2) Cuando el miembro tiene otro tipo de configuración; 3) Cuando el miembro está sujeto a otro tipo de carga.

## Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias de la Facultad de Contabilidad y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila. Los autores también agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. El estudiante de doctorado Francisco Velázquez Santillán (CVU/Becario: 367892/582981) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo económico.

## Referencias

1. **Guldan, R. (1956).** *Estructuras aporricadas y vigas continuas.* El Ateneo, pp. 360.
2. **Portland Cement Association (1958).** *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section.* Portland Cement Association.
3. **Just, D.J. (1977).** Plane frameworks of tapering box and I-section. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 103, No. 1, pp. 71–86.
4. **Schreyer, H.L. (1978).** Elementary theory for linearly tapered beams. *Journal of the Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 104, No. 3, pp. 515–527.
5. **Medwadowski, S.J. (1984).** Nonprismatic shear beams. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, Vol. 110, No. 5, pp. 1067–1082.
6. **Brown, C.J. (1984).** Approximate stiffness matrix for tapered beams. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, Vol. 110, No. 12, pp. 3050–3055. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:12(3050).
7. **Tena-Colunga, A. (2007).** *Análisis de estructuras con métodos matriciales.* Limusa.
8. **Shoostari, A. & Khajavi, R. (2010).** An efficient procedure to find shape functions and stiffness matrices of nonprismatic Euler-Bernoulli and Timoshenko beam elements. *Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 29, No. 5, pp. 826–836. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2010.04.003.
9. **Yuksel, S.B. (2012).** Assessment of non-prismatic beams having symmetrical parabolic haunches with constant haunch length ratio of 0.5. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 42, No. 6, pp. 849–866. DOI: 10.12989/sem.2012.
10. **Luévanos-Rojas, A. (2012).** A mathematical model for rectangular beams of variable cross section of symmetrical parabolic shape for uniformly distributed load. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 80, No. 2, pp. 97–230.
11. **Luévanos-Rojas, A. (2013).** Mechanical Elements of Rectangular Nonprismatic Members for Symmetrical Parabolic Haunches Subjected to a Uniformly Distributed Load. *Journal Architectural Engineering Technology*, Vol. 2, No. 2, pp. 1–8. DOI: 10.4172/2168-9717.1000111.
12. **Luévanos-Rojas, A. & Montoya-Ramírez, J. (2014).** Mathematical model for rectangular beams of variable cross section of symmetrical linear shape for uniformly distributed load. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 10, No. 3, pp. 851–881.
13. **Luévanos-Rojas, A., Luévanos-Rojas, R., Luévanos-Soto, I., Luévanos-Vázquez, R. G., & Ramírez-Luévanos, O. A. (2014).** Mathematical Model for Rectangular Beams of Variable Cross Section of Symmetrical Linear Shape for Concentrated Load. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 10(3), 851–881.
14. **Luévanos-Rojas, A. (2014).** A mathematical model for fixed-end moments for two types of loads for a parabolic shaped variable rectangular cross section. *Ingeniería e Investigación*, 34(2), 17–22.
15. **Luévanos-Rojas, A. (2015).** Modelado para vigas de sección transversal “I” sometidas a una carga uniformemente distribuida con cartelas rectas. *Ingeniería Mecánica Tecnología y Desarrollo*, 5(2), 281–292.
16. **Luévanos-Soto, I. & Luévanos-Rojas, A. (2017).** Modeling for fixed-end moments of I-sections with straight haunches under concentrated load. *Steel and Composite Structures*, 23(5), 597–610.
17. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 12(3), 973–985.
18. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 12(4), 1027–1041.
19. **Hibbeler, R.C. (2006).** *Structural analysis.* New Jersey, Prentice-Hall, Inc.
20. **Vaidyanathan, R. & Perumal, P. (2006).** *Structural Analysis.* New Delhi, Laxmi Publications (P) LTD.
21. **Williams, A. (2009).** *Structural Analysis: In Theory and Practice.* New York, Butterworth Heinemann.
22. **McCormac, J.C. (2007).** *Structural Analysis: using classical and matrix methods.* New York, John Wiley & Sons.
23. **Ghali, A., Neville, A.M., & Brown, T.G. (2003).** *Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach.* New York, Taylor & Francis.
24. **González-Cuevas O.M. (2007).** *Análisis estructural.* México, Limusa.
25. **Gere J.M. & Goodo B.J. (2009).** *Mechanics of Materials.* New York, Cengage Learning.

Article received on 02/01/2018; accepted on 08/01/2019.  
Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.