

Deflexiones en traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga concentrada

Rogelio Barraza-Saucedo, Arnulfo Luévanos-Rojas*

Universidad Autónoma de Coahuila,
Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria,
México

rogelio.barraza.s@gmail.com, arnulfol.2007@hotmail.com

Resumen. Este documento presenta un modelo analítico para obtener las rotaciones y los desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal en cualquier punto de una viga de sección rectangular con cartelas parabólicas sometida a un momento en cada apoyo y una carga concentrada tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante, que es la principal contribución de esta investigación. El modelo actual no considera las deformaciones por cortante para obtener las rotaciones y los desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal de la viga. La metodología se realiza bajo el concepto de que la derivada del desplazamiento vertical es la pendiente o rotación y la segunda derivada es el momento de la viga. También, se realiza una comparación entre el modelo propuesto y el modelo actual para vigas simplemente apoyadas, vigas empotradas en ambos extremos y vigas usando los mismos momentos y reacciones en los extremos (modelo propuesto) para ambos modelos con respecto al desplazamiento vertical máximo y su ubicación en la viga. Los resultados muestran que el modelo propuesto es mayor para vigas simplemente apoyadas y vigas usando los mismos momentos y reacciones en los extremos, y menor para vigas empotradas en ambos extremos para el desplazamiento vertical máximo con respecto al modelo actual. Por tanto, el modelo propuesto es más seguro y más adecuado con respecto al modelo actual para el análisis estructural, ya que las fuerzas cortantes y los momentos están presentes en todas las estructuras y se producen deformaciones por flexión y cortante.

Palabras clave. Traves rectangulares, cartelas parabólicas, deformaciones por flexión y cortante, rotaciones, desplazamientos verticales.

Deflections in Beams of Rectangular Cross Section with Parabolic Haunches Subjected to a Concentrated Load

Abstract. This paper introduces an analytical model to determine the rotations and displacements perpendicular to the longitudinal axis at any point on a rectangular-section beam with parabolic stiffeners, exposed to moments at each support and a concentrated load, considering both bending and shear deformations, which is the primary contribution of this research. The current model does not account for shear deformations when calculating the rotations and displacements perpendicular to the beam's longitudinal axis. The methodology relies on the vertical displacement's first derivative as the slope or rotation and the second as the moment. Additionally, the proposed model is compared to the current model for simply supported beams, beams fixed at both ends, and beams with identical moments and reactions at the ends. The comparison focuses on the maximum vertical displacement and its location along the beam. The results show that the proposed model yields greater values for simply supported beams and beams using the same moments and reactions at the ends, and smaller values for beams fixed at both ends, in terms of the maximum vertical displacement compared to the current model. Therefore, the proposed model is safer and suitable than the current one for structural analysis, as shear forces and moments are present in all structures, and both bending and shear deformations occur.

Keywords. Rectangular beams, parabolic haunches, bending and shear deformations, rotations, vertical displacements.

1. Introducción

La deflexión de las vigas es el movimiento hacia abajo que hace una viga desde su posición inicial sin carga a otra posición deformada cuando se le aplica una carga. Dado que las vigas suelen tratarse como elementos bidimensionales, el eje neutro de una viga suele tomarse como punto de referencia para medir la deflexión de las vigas.

La deformación de vigas de acero estructural y concreto reforzado es una medida importante de su rendimiento de servicio, porque se requiere cumplir con los códigos de diseño actuales, y las deformaciones en las vigas consisten en deformaciones por flexión y cortante.

Muchos investigadores han estudiado la curva elástica de trabes para obtener las deflexiones máximas, pero no consideran las deformaciones por cortante. Algunos investigadores han presentado estudios sobre vigas en Voladizo no prismáticas, tales como:

Lee [9], Dado y Al-Sadder [6], Borboni y De Santis [2], Banerjee et al. [1], Solano-Carrillo [21], Chen [4], Yau [25], Brojan et al. [3].

Algunos investigadores han desarrollado modelos matemáticos para obtener la curva elástica para vigas simplemente apoyadas de sección rectangular constante sometidas a una carga uniformemente distribuida y/o carga concentrada tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener las deflexiones en cualquier lugar de la viga (rotaciones y desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal) [14, 16].

Otros autores han desarrollado modelos matemáticos y ayudas de diseño para vigas rectangulares con cartelas rectas o cartelas parabólicas en los extremos para las vigas sometidas a una carga uniformemente distribuida o carga concentrada tomando en cuenta las deformaciones a flexión y cortante [12, 13, 24, 19, 18, 8, 5, 11].

Estos trabajos muestran los factores para los momentos de empotramiento, factores de transporte o factores de arrastre y factores de rigidez. Varios autores han presentado modelos óptimos para obtener los lados de la viga y su acero de refuerzo longitudinal para secciones

rectangulares con cartelas rectas o cartelas parabólicas bajo carga uniformemente distribuida o carga concentrada y momentos en los extremos [15, 10]. Las revisiones de la literatura de las investigaciones desarrolladas y/o comparadas por software se muestran a continuación: Majumder y Kumar [17] estudiaron la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada sometida a tres tipos de carga. Las cargas son:

- a) Carga uniformemente distribuida.
- b) Carga concentrada en el centro de la viga.
- c) Carga triangularmente distribuida.

El análisis teórico se realizó por la Teoría de Euler-Bernoulli (Deformaciones por flexión) y se comparó con el software ANSYS 14.0.

Los resultados numéricos mostraron una excelente precisión entre la teoría de Euler-Bernoulli y el software ANSYS 14.0. Debnath y Debnath [7] analizaron la deflexión máxima para diferentes tipos de vigas de sección transversal rectangular constante:

1. Vigas simplemente apoyadas:
 - a) Carga uniformemente distribuida,
 - b) Carga concentrada en el centro de la viga.
2. Vigas en Voladizo:
 - a) Carga uniformemente distribuida,
 - b) Carga concentrada en el extremo libre.

El cálculo teórico se realizó según la Teoría de Euler-Bernoulli (Deformaciones por flexión) y se comparó con el software ANSYS 14.0. Los datos considerados para las vigas son:

- $L = 100$ m,
- $b = 10$ m,
- $h = 10$ m,
- $\nu = 0.3$,
- $E = 2 \times 10^7$ N/m²,
- $F = 500$ N.

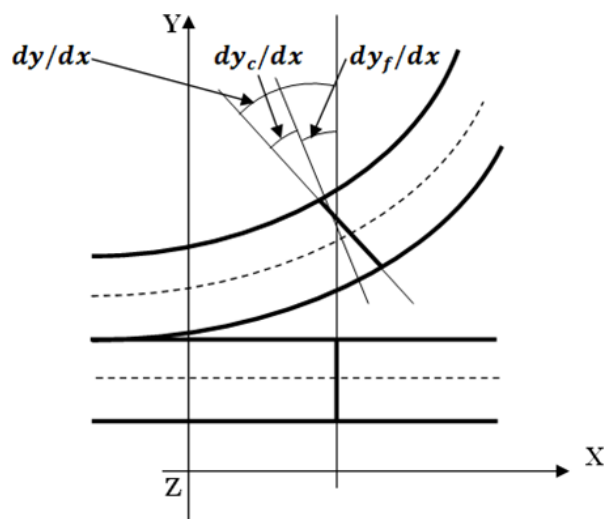


Fig. 1. Deformación de un elemento de viga

Los elementos sólidos estudiados fueron 188, 189, 185 y 285. El resultado más preciso fue medido por el elemento sólido 189 seguido por el elemento sólido 188 y otros elementos sólidos. Los resultados fueron precisos entre la teoría de Euler-Bernoulli y el software ANSYS 14.0.

Sihua et al. [20] presentaron el análisis no lineal para una viga de concreto reforzado con ayuda del software de análisis de elementos finitos ABAQUS. La viga es simplemente apoyada y tiene 1500 mm de largo; con una sección de 180×1000 mm, la resistencia del concreto es C25, el refuerzo longitudinal y estribos adoptados HPB235 reforzados.

En este análisis de vigas simplemente apoyadas, se ha introducido a fondo el modelo de plasticidad del daño del concreto en ABAQUS. Finalmente, los resultados de la experimentación y el análisis ABAQUS se compararon en un diagrama, y la carga alcanzó la capacidad de 24 kN, el valor de deflexión en el centro de la longitud de la viga es de 10.521 mm de ABAQUS y 12.795 mm de prueba.

Si se hubieran considerado las deformaciones de cortante en el software ABAQUS, los resultados del software ABAQUS estarían más cerca de la prueba experimental, porque estas deformaciones tienden a aumentar las deformaciones totales para vigas.

Este trabajo presenta un modelo analítico de la curva elástica para vigas rectangulares con cartelas parabólicas, bajo carga concentrada y momentos en los extremos, considerando deformaciones por flexión y cortante (Teoría de Timoshenko) para obtener las rotaciones y desplazamientos, el enfoque principal de esta investigación. El modelo propuesto se divide en tres partes para la viga:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq a, \\ a &\leq x \leq L - c, \\ L - c &\leq x \leq L. \end{aligned}$$

El modelo actual de la curva elástica para vigas rectangulares bajo carga concentrada considera solo las deformaciones por flexión (Teoría de Euler-Bernoulli).

2. Modelo propuesto

La Figura 1 muestra la diferencia entre la teoría de Timoshenko y la teoría de Euler-Bernoulli. La primera teoría incluye el efecto de los esfuerzos de flexión y cortante sobre la deformación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_c}{dx} + \frac{dy_f}{dx}. \quad (1)$$

Y la segunda teoría incluye el efecto de los esfuerzos de flexión en la deformación [22, 23]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_f}{dx}. \quad (2)$$

La teoría de Timoshenko considera las deformaciones por flexión y cortante, esto es válido para los miembros cortos y largos. La ecuación de la curva elástica se presenta de la siguiente manera [22, 23]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_c}{dx^2} + \frac{d^2y_f}{dx^2}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \left(\frac{1}{G A_{cx}} \right) \frac{dV_x}{dx} - \frac{M_z}{E I_z}, \quad (4)$$

donde:

G = Módulo de cortante.

y = Desplazamiento total.

y_c = Desplazamiento por cortante debido a la fuerza cortante.

Tabla 1. Propiedades de la sección rectangular con cartelas parabólicas

Concepto	Ecuaciones		
	$0 \leq x \leq a$	$a \leq x \leq L - c$	$L - c \leq x \leq L$
$h_x(x)$	$\frac{a^2 h + u(x-a)^2}{a^2}$	h	$\frac{c^2 h + s(x-L+c)^2}{c^2}$
$A_{cx}(x)$	$\frac{5b [a^2 h + u(x-a)^2]}{6a^2}$	$\frac{5bh}{6}$	$\frac{5b [c^2 h + s(x-L+c)^2]}{6c^2}$
$I_z(x)$	$\frac{b [a^2 h + u(x-a)^2]^3}{12a^6}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b [c^2 h + s(x-L+c)^2]^3}{12c^6}$

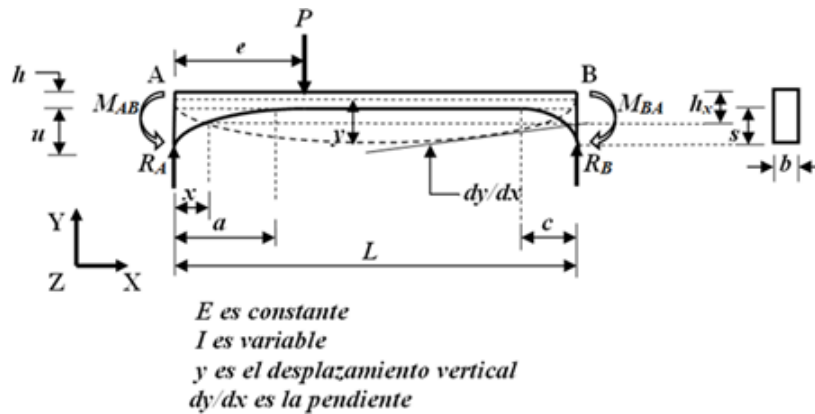


Fig. 2. Viga sometida a un momento en cada extremo y una carga concentrada

y_f = Desplazamiento por flexión debido al momento.

A_{cx} = Área de cortante.

E = Módulo de elasticidad.

M_z = Momento de flexión alrededor del eje Z.

I_z = Momento de inercia alrededor del eje Z.

Las rotaciones en cualquier parte de la viga por integración de la ecuación (4) se obtienen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{V_x}{G A_{cx}} - \int \frac{M_z}{E I_z} dx. \quad (5)$$

En la Figura 2 se muestra la viga AB sometida a un momento en cada extremo y una carga concentrada, así como su sección transversal rectangular considerando que el ancho "b" es constante y la altura "h_x" es variable de forma parabólica en sus extremos y constante en la parte central.

Los valores de las reacciones en los apoyos R_A y R_B se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$R_A = \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L} + \frac{P(L - e)}{L}, \quad (6)$$

$$R_B = \frac{Pe}{L} - \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L}. \quad (7)$$

Las fuerzas cortantes y momentos alrededor del eje Z a una distancia x en cualquier parte de la trabe son:

$$V_x = R_A \rightarrow (0 \leq x \leq e), \quad (8)$$

$$V_x = R_A - P \rightarrow (e \leq x \leq L), \quad (9)$$

$$M_z = R_A x - M_{AB} \rightarrow (0 \leq x \leq e), \quad (10)$$

$$M_z = (R_A - P)x + Pe - M_{AB} \rightarrow (e \leq x \leq L). \quad (11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (8) y (10) en la ecuación (5), para $0 \leq x \leq e$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{R_A x - M_{AB}}{I_z} dx + \frac{R_A}{G A_{cx}}. \quad (12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (9) y (11) en la ecuación (5), para $e \leq x \leq L$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{(R_A - P)x + Pe - M_{AB}}{I_z} dx + \frac{R_A - P}{G A_{cx}}. \quad (13)$$

La Tabla 1 muestra las ecuaciones de las alturas " $h_x(x)$ " a una distancia " x ", áreas de cortante " $A_{cx}(x)$ " a una distancia " x ", y el momento

de inercia " $I_z(x)$ " alrededor del eje " z " a una distancia " x " para cada intervalo.

2.1. Cuando la carga se localiza de $0 \leq x \leq a$

Sustituyendo las propiedades de la Tabla 1 en las ecuaciones (12) y (13) para cada intervalo, y resolviendo las integrales se obtienen las rotaciones en cualquier lugar (dy/dx), y posteriormente se desarrolla la integral para obtener los desplazamientos en cualquier lugar de la viga (y). Las ecuaciones simplificadas para intervalo se muestran a continuación, para $0 \leq x \leq e$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3a^2 \{2R_A a^4 h^2 + (R_A a - M_{AB}) u (a - x) [3u(a - x)^2 + 5a^2 h]\}}{2Ebh^2 u [a^2 h + u(a - x)^2]^2} - \frac{9a (R_A a - M_{AB})}{2Ebh^2 \sqrt{hu}} \arctan \left[\frac{u(a - x)}{a\sqrt{hu}} \right] + \frac{6R_A a^2}{5Gb [a^2 h + u(a - x)^2]} + C_1, \quad (14)$$

$$y = \left[\frac{3a [3u ((R_A a - M_{AB})(a - x) + R_A a^2 h)]}{2Ebh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left(\frac{u(a - x)}{a\sqrt{hu}} \right) + \frac{9a^2 (R_A a - M_{AB})}{4Ebh^2 u} \ln(a^2 h) - \frac{3a^4 (R_A a - M_{AB})}{2Ebh u (a^2 h + u(a - x)^2)} + C_1 x + C_2. \quad (15)$$

Para $e \leq x \leq a$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3a^2 (a - x) [(R_A - P)a + Pe - M_{AB}] [5a^2 h + 3u(a - x)^2]}{2Ebh^2 [a^2 h + u(a - x)^2]^2} - \frac{3a^6 (R_A - P)}{Ebu [a^2 h + u(a - x)^2]^2} - \frac{9a [(R_A - P)a + Pe - M_{AB}]}{2Ebh^2 \sqrt{hu}} \arctan \left[\frac{u(a - x)}{a\sqrt{hu}} \right] + \frac{6(R_A - P)a^2}{5Gb [a^2 h + u(a - x)^2]} + C_3, \quad (16)$$

$$y = \left[\frac{3a \{3u(a - x) [(R_A - P)a + Pe - M_{AB}] + (R_A - P)a^2 h\}}{2Ebh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6(R_A - P)a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left(\frac{u(a - x)}{a\sqrt{hu}} \right) + \frac{9a^2 [(R_A - P)a + Pe - M_{AB}]}{4Ebh^2 u} \ln(a^2 h) - \frac{3a^4 [(R_A - P)x + Pe - M_{AB}]}{2Ebh u [a^2 h + u(a - x)^2]} + C_3 x + C_4. \quad (17)$$

Para $a \leq x \leq L - c$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x [(R_A - P)x + 2(Pe - M_{AB})]}{Eb h^3} + \frac{6(R_A - P)}{5Gb h} + C_5, \quad (18)$$

$$y = \frac{2x^2 [(R_A - P)x + 3(Pe - M_{AB})]}{Eb h^3} + \frac{6(R_A - P)x}{5Gb h} + C_5 x + C_6. \quad (19)$$

Para $L - c \leq x \leq L$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3c^2 \{2(R_A - P)c^4h^2 + [(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB}]s(L - c - x) [3s(L - c - x)^2 + 5c^2h]\}}{2Ebh^2s(c^2h + s(L - c - x)^2)^2} - \frac{9c[(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB}]}{2Ebh^2\sqrt{hs}} \arctan\left(\frac{s(L - c - x)}{c\sqrt{hs}}\right) + \frac{6(R_A - P)c^2}{5Gb[c^2h + s(L - c - x)^2]} + C_7, \quad (20)$$

$$y = \left[\frac{9c[(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB}](L - c - x)}{2Ebh^2\sqrt{hs}} + \frac{3(R_A - P)c^3}{2Ebh^2\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5Gb\sqrt{hs}} \right] \arctan\left(\frac{s(L - c - x)}{c\sqrt{hs}}\right) + \frac{9c^2[(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB}]}{4Ebh^2s} \ln(c^2h) - \frac{3c^4[(R_A - P)x + Pe - M_{AB}]}{2Ebh^2s[c^2h + s(L - c - x)^2]} + C_7x + C_8. \quad (21)$$

Las ocho condiciones conocidas que debe cumplir la viga para obtener las constantes de integración son:

1. Sustituyendo la condición $x = 0$ e $y = 0$ en la ecuación (15).
2. Sustituyendo la condición $x = e$ en las ecuaciones (14) y (16), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
3. Sustituyendo la condición $x = e$ en las ecuaciones (15) y (17), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
4. Sustituyendo la condición $x = a$ en las ecuaciones (16) y (18), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.

5. Sustituyendo la condición $x = a$ en las ecuaciones (17) y (19), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
6. Sustituyendo la condición $x = L - c$ en las ecuaciones (18) y (20), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
7. Sustituyendo la condición $x = L - c$ en las ecuaciones (19) y (21), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
8. Sustituyendo la condición $x = L$ e $y = 0$ en la ecuación (21).

Ahora, sustituyendo las ocho condiciones conocidas en las ecuaciones correspondientes, se generan ocho ecuaciones para obtener las constantes de integración. Las constantes de integración se muestran a continuación:

$$C_1 = -\frac{6Pa^2(L - e)}{5GbL[a^2h + u(a - e)^2]} - \frac{6(R_A - P)(L - a - c)}{5GbLh} + \left[\frac{3a^2[3u(R_Aa - M_{AB}) + R_Aah]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan\left[\sqrt{\frac{u}{h}}\right] + \left[\frac{3Pa[3u(a - e)(L - a) - a^2h]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} + \frac{6Pa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan\left[\frac{u(a - e)}{a\sqrt{hu}}\right] + \frac{3c^2[(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2Ebh^2s(h + s)} + \left[\frac{3c^2\{(R_A - P)[ch - 3s(L - c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2Ebh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan\left[\sqrt{\frac{s}{h}}\right] + \frac{3M_{AB}a^2}{2Ebh^2u(h + u)} + \frac{3Pa^2(L - e)\{2a^4h^2 + u(a - e)^2[3u(a - e)^2 + 5a^2h]\}}{2Ebh^2u[a^2h + u(a - e)^2]^2} + \frac{a^2(R_A - P)[4u(3L - 2a) + 3h(2L - a)] + 3a(Pe - M_{AB})[4u(2L - a) + ah]}{2Ebh^3u} - \frac{(R_A - P)[3c^2h(L + c) + 4s(L - c)^2(L + 2c)] + 3(Pe - M_{AB})[c^2h + 4s(L^2 - c^2)]}{2Ebh^3s}, \quad (22)$$

$$C_2 = - \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2Ebh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{9a^2 (R_A a - M_{AB})}{4Ebh^2 u} \ln(a^2 h) - \frac{3M_{AB} a^2}{2Ebhu (h + u)}, \quad (23)$$

$$C_3 = \frac{6Pa^2 e}{5GbL [a^2 h + u(a - e)^2]} - \frac{6(R_A - P)(L - a - c)}{5GbLh} + \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2EbLh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5GbL \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \left[\frac{3Pa^2 [ah + 3u(a - e)]}{2EbLh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6Pa}{5GbL \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u(a - e)}{a \sqrt{hu}} \right] + \frac{3c^2 [(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2EbLhs (h + s)} + \left[\frac{3c^2 \{(R_A - P)[ch - 3s(L - c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2EbLh^2 s \sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5GbL \sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \frac{3M_{AB} a^2}{2EbLhu (h + u)} - \frac{3Pa^2 e \{2a^4 h^2 + u(a - e)^2 [3u(a - e)^2 + 5a^2 h]\}}{2EbLh^2 u [a^2 h + u(a - e)^2]^2} + \frac{a^2 (R_A - P) [4u(3L - 2a) + 3h(2L - a)] + 3a(Pe - M_{AB}) [4u(2L - a) + ah]}{2EbLh^3 u} - \frac{(R_A - P) [3c^2 h(L + c) + 4s(L - c)^2 (L + 2c)] + 3(Pe - M_{AB}) [c^2 h + 4s(L^2 - c^2)]}{2EbLh^3 s}, \quad (24)$$

$$C_4 = - \frac{6Pa^2 e}{5Gb [a^2 h + u(a - e)^2]} - \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2Ebh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{3M_{AB} a^2}{2Ebhu (h + u)} + \left[\frac{3Pa^2 [ah + 3u(a - e)]}{2Ebh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6Pa}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u(a - e)}{a \sqrt{hu}} \right] - \frac{9a^2 [(R_A - P)a + Pe - M_{AB}] \ln(a^2 h) + \frac{3Pa^2 e \{2a^4 h^2 + u(a - e)^2 [3u(a - e)^2 + 5a^2 h]\}}{2Ebh^2 u [a^2 h + u(a - e)^2]^2}}{4Ebh^2 u}, \quad (25)$$

$$C_5 = \frac{6Pa^2 e}{5GbL [a^2 h + u(a - e)^2]} - \frac{6(R_A - P)(L - a - c)}{5GbLh} + \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2EbLh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5GbL \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \left[\frac{3c^2 \{(R_A - P)[ch - 3s(L - c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2EbLh^2 s \sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5GbL \sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] - \left[\frac{3Pa^2 [ah + 3u(a - e)]}{2EbLh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6Pa}{5GbL \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u(a - e)}{a \sqrt{hu}} \right] + \frac{3M_{AB} a^2}{2EbLhu (h + u)} - \frac{3Pa^2 e \{2a^4 h^2 + u(a - e)^2 [3u(a - e)^2 + 5a^2 h]\}}{2EbLh^2 u [a^2 h + u(a - e)^2]^2} + \frac{3c^2 [(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2EbLhs (h + s)} - \frac{a^3 (R_A - P)(3h + 8u) + 3a^2 (Pe - M_{AB})(4u - h)}{2EbLh^3 u} - \frac{(R_A - P) [3c^2 h(L + c) + 4s(L - c)^2 (L + 2c)] + 3(Pe - M_{AB}) [c^2 h + 4s(L^2 - c^2)]}{2EbLh^3 s}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & -\frac{6Pa^2e}{5Gb \left[a^2h + u(a-e)^2 \right]} - \frac{6(R_A - P)a}{5Gbh} - \left[\frac{3a^2 \left[3u(R_Aa - M_{AB}) + R_Aah \right]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \\
& \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \left[\frac{3Pa^2 \left[ah + 3u(a-e) \right]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6Pa}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u(a-e)}{a\sqrt{hu}} \right] - \frac{3M_{AB}a^2}{2Ebh u(h+u)} + \\
& \frac{3Pa^2e \left\{ 2a^4h^2 + u(a-e)^2 \left[3u(a-e)^2 + 5a^2h \right] \right\}}{2Ebh^2u \left[a^2h + u(a-e)^2 \right]^2} + \frac{a^3(R_A - P)(3h + 8u) + 3a^2(Pe - M_{AB})(4u - h)}{2Ebh^3u},
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
C_7 = & \frac{6Pa^2e}{5GbL \left[a^2h + u(a-e)^2 \right]} - \frac{6(R_A - P)(L - a - c)}{5GbLh} + \left[\frac{3a^2 \left[3u(R_Aa - M_{AB}) + R_Aah \right]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \\
& \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \left[\frac{3Pa^2 \left[ah + 3u(a-e) \right]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6Pa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u(a-e)}{a\sqrt{hu}} \right] + \frac{3c^2 \left[(R_A - P)L + Pe - M_{AB} \right]}{2EbLhs(h+s)} + \\
& \left[\frac{3c^2 \left\{ (R_A - P) \left[ch - 3s(L - c) \right] - 3s(Pe - M_{AB}) \right\}}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h+u)} - \\
& \frac{3Pa^2e \left\{ 2a^4h^2 + u(a-e)^2 \left[3u(a-e)^2 + 5a^2h \right] \right\}}{2EbLh^2u \left[a^2h + u(a-e)^2 \right]^2} - \frac{a^3(R_A - P)(3h + 8u) + 3a^2(Pe - M_{AB})(4u - h)}{2EbLh^3u} + \\
& \frac{(R_A - P)(L - c) \left[3c^2h + 8s(L - c)^2 \right] - 3(Pe - M_{AB}) \left[c^2h - 4s(L - c)^2 \right]}{2EbLh^3s},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
C_8 = & \frac{6(R_A - P)(L - a - c)}{5Gbh} - \frac{6Pa^2e}{5Gb \left[a^2h + u(a-e)^2 \right]} - \left[\frac{3a^2 \left[3u(R_Aa - M_{AB}) + R_Aah \right]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \\
& \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \left[\frac{3Pa^2 \left[ah + 3u(a-e) \right]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6Pa}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u(a-e)}{a\sqrt{hu}} \right] - \frac{3M_{AB}a^2}{2Ebh u(h+u)} - \\
& \frac{9c^2 \left[(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB} \right] \ln(c^2h) + \frac{3Pa^2e \left\{ 2a^4h^2 + u(a-e)^2 \left[3u(a-e)^2 + 5a^2h \right] \right\}}{2Ebh^2u \left[a^2h + u(a-e)^2 \right]^2}}{4Ebh^2s} + \\
& \frac{a^3(R_A - P)(3h + 8u) + 3a^2(Pe - M_{AB})(4u - h)}{2Ebh^3u} - \\
& \frac{(R_A - P)(L - c) \left[3c^2h + 8s(L - c)^2 \right] - 3(Pe - M_{AB}) \left[c^2h - 4s(L - c)^2 \right]}{2Ebh^3s}.
\end{aligned} \tag{29}$$

2.2. Carga localizada de $a \leq x \leq L - c$

Sustituyendo las propiedades de la Tabla 1 en las ecuaciones (12) y (13) para cada intervalo, y resolviendo las integrales se obtienen las rotaciones en cualquier lugar (dy/dx), y

posteriormente se desarrolla la integral para obtener los desplazamientos en cualquier lugar de la viga (y).

Las ecuaciones simplificadas para intervalo se muestran a continuación. Para $0 \leq x \leq a$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3a^2 \left\{ 2R_A a^4 h^2 + (R_A a - M_{AB}) u (a-x) \left[3u (a-x)^2 + 5a^2 h \right] \right\}}{2Ebh^2 u \left[a^2 h + u (a-x)^2 \right]^2} - \frac{9a (R_A a - M_{AB})}{2Ebh^2 \sqrt{hu}} \arctan \left[\frac{u (a-x)}{a\sqrt{hu}} \right] + \frac{6R_A a^2}{5Gb \left[a^2 h + u (a-x)^2 \right]} + C_1, \quad (30)$$

$$y = \left[\frac{3a \left[3u (R_A a - M_{AB}) (a-x) + R_A a^2 h \right]}{2Ebh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u (a-x)}{a\sqrt{hu}} \right] + \frac{9a^2 (R_A a - M_{AB})}{4Ebh^2 u} \ln (a^2 h) - \frac{3a^4 (R_A x - M_{AB})}{2Ebh u \left[a^2 h + u (a-x)^2 \right]} + C_1 x + C_2. \quad (31)$$

Para $a \leq x \leq e$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x (R_A x - 2M_{AB})}{Ebh^3} + \frac{6R_A}{5Gb h} + C_3, \quad (32)$$

$$y = \frac{2x^2 (R_A x - 3M_{AB})}{Ebh^3} + \frac{6R_A x}{5Gb h} + C_3 x + C_4. \quad (33)$$

Para $e \leq x \leq L - c$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x \left[(R_A - P) x + 2 (Pe - M_{AB}) \right]}{Ebh^3} + \frac{6 (R_A - P)}{5Gb h} + C_5, \quad (34)$$

$$y = \frac{2x^2 \left[(R_A - P) x + 3 (Pe - M_{AB}) \right]}{Ebh^3} + \frac{6 (R_A - P) x}{5Gb h} + C_5 x + C_6. \quad (35)$$

Para $L - c \leq x \leq L$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3c^2 \left\{ 2 (R_A - P) c^4 h^2 + \left[(R_A - P) (L - c) + Pe - M_{AB} \right] s (L - c - x) \left[3s (L - c - x)^2 + 5c^2 h \right] \right\}}{2Ebh^2 s \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]^2} - \frac{9c \left[(R_A - P) (L - c) + Pe - M_{AB} \right]}{2Ebh^2 \sqrt{hs}} \arctan \left[\frac{s (L - c - x)}{c\sqrt{hs}} \right] + \frac{6 (R_A - P) c^2}{5Gb \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]} + C_7, \quad (36)$$

$$y = \left[\frac{9c \left[(R_A - P) (L - c) + Pe - M_{AB} \right] (L - c - x)}{2Ebh^2 \sqrt{hs}} + \frac{3c^3 (R_A - P)}{2Ebh s \sqrt{hs}} - \frac{6 (R_A - P) c}{5Gb \sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\frac{s (L - c - x)}{c\sqrt{hs}} \right] + \frac{9c^2 \left[(R_A - P) (L - c) + Pe - M_{AB} \right]}{4Ebh^2 s} \ln (c^2 h) - \frac{3c^4 \left[(R_A - P) x + Pe - M_{AB} \right]}{2Ebh s \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]} + C_7 x + C_8. \quad (37)$$

Las ocho condiciones conocidas que debe cumplir la viga para obtener las constantes de integración son:

1. Sustituyendo la condición $x = 0$ e $y = 0$ en la ecuación (31).
2. Sustituyendo la condición $x = a$ en las ecuaciones (30) y (32), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
3. Sustituyendo la condición $x = a$ en las ecuaciones (31) y (33), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
4. Sustituyendo la condición $x = e$ en las ecuaciones (32) y (34), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
5. Sustituyendo la condición $x = e$ en las ecuaciones (33) y (35), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
6. Sustituyendo la condición $x = L - c$ en las ecuaciones (34) y (36), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
7. Sustituyendo la condición $x = L - c$ en las ecuaciones (35) y (37), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
8. Sustituyendo la condición $x = L$ e $y = 0$ en la ecuación (37).

Ahora, sustituyendo las ocho condiciones conocidas en las ecuaciones correspondientes, se generan ocho ecuaciones para obtener las constantes de integración. Las constantes de integración se muestran a continuación:

$$C_1 = -\frac{6Pc}{5GbLh} - \frac{6R_A(L-a-c)}{5GbLh} \left[\frac{3c^2 \{(R_A - P)[ch - 3s(L-c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \\ + \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \frac{3c^2 [(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2EbLh^2s(h+s)} + \left[\frac{3a^2 [3u(R_{AA} - M_{AB}) + R_A ah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \\ + \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \frac{3Pa^2(L-e) \left\{ 2a^4h^2 + u(a-e)^2 [3u(a-e)^2 + 5a^2h] \right\}}{2EbLh^2u [a^2h + u(a-e)^2]^2} + \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h+u)} - \quad (38) \\ - \frac{2Pe^2(3L-e)}{EbLh^3} - \frac{a \{ R_A a [a(3h+8u) - 6L(h+2u)] + 3M_{AB} [a(h-4u) + 8Lu] \}}{2EbLh^3u} \\ - \frac{(R_A - P) [3c^2h(L+c) + 4s(L-c)^2(L+2c)] + 3(Pe - M_{AB}) [c^2h + 4s(L^2 - c^2)]}{2EbLh^3s},$$

$$C_2 = - \left[\frac{3a^2 [3u(R_{AA} - M_{AB}) + R_A ah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{9a^2 (R_{AA} - M_{AB})}{4EbLh^2u} \ln(a^2h) - \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h+u)}, \quad (39)$$

$$C_3 = -\frac{6Pc}{5GbLh} - \frac{6R_A(L-a-c)}{5GbLh} + \left[\frac{3c^2 \{(R_A - P)[ch - 3s(L-c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \\ + \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \left[\frac{3a^2 [3u(R_{AA} - M_{AB}) + R_A ah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \quad (40) \\ + \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h+u)} + \frac{2Pe^2(3L-e)}{EbLh^3} - \frac{a^2 [R_A a(3h+8u) + 3M_{AB}(h-4u)]}{2EbLh^3u} + \frac{3c^2 [(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2EbLh^2s(h+s)} \\ - \frac{(R_A - P) [3c^2h(L+c) + 4s(L-c)^2(L+2c)] + 3(Pe - M_{AB}) [c^2h + 4s(L^2 - c^2)]}{2EbLh^3s},$$

$$C_4 = -\frac{6R_A a}{5Gb h} - \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2Eb h^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \frac{a^2 [R_A a (3h + 8u) + 3M_{AB} (h - 4u)]}{2Eb L h^3 u} - \frac{3M_{AB} a^2}{2Eb h u (h + u)}, \quad (41)$$

$$C_5 = \frac{6R_A a}{5Gb L h} - \frac{6(R_A - P)(L - c)}{5Gb L h} + \left[\frac{3c^2 \{(R_A - P)[ch - 3s(L - c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2Eb L h^2 s \sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5Gb L \sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2Eb L h^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb L \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \frac{3c^2 [(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2Eb L h^2 s (h + s)} + \frac{3M_{AB} a^2}{2Eb L h u (h + u)} + \frac{2Pe^2 (3L - c)}{Eb L h^3} - \frac{a^2 [R_A a (3h + 8u) + 3M_{AB} (h - 4u)]}{2Eb L h^3 u} - \frac{(R_A - P) [3c^2 h (L + c) + 4s(L - c)^2 (L + 2c)] + 3(Pe - M_{AB}) [c^2 h + 4s(L^2 - c^2)]}{2Eb L h^3 s}, \quad (42)$$

$$C_6 = -\frac{6R_A a}{5Gb h} - \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2Eb h^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{3M_{AB} a^2}{2Eb h u (h + u)} + \frac{2Pe^3}{Eb h^3} + \frac{a^3 (R_A - P) (3h + 8u) + 3a^2 (Pe - M_{AB}) (4u - h)}{2Eb h^3 u}, \quad (43)$$

$$C_7 = \frac{6R_A a}{5Gb L h} - \frac{6(R_A - P)(L - c)}{5Gb L h} + \left[\frac{3c^2 \{(R_A - P)[ch - 3s(L - c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2Eb L h^2 s \sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5Gb L \sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2Eb L h^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb L \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \frac{3c^2 [(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2Eb L h^2 s (h + s)} + \frac{3M_{AB} a^2}{2Eb L h u (h + u)} - \frac{2Pe^3}{Eb L h^3} - \frac{a^2 [R_A a (3h + 8u) + 3M_{AB} (h - 4u)]}{2Eb L h^3 u} + \frac{(R_A - P)(L - c) [3c^2 h + 8s(L - c)^2] - 3(Pe - M_{AB}) [c^2 h - 4s(L - c)^2]}{2Eb L h^3 s}, \quad (44)$$

$$C_8 = -\frac{6R_A a}{5Gb h} + \frac{6(R_A - P)(L - c)}{5Gb h} - \left[\frac{3a^2 [3u(R_A a - M_{AB}) + R_A a h]}{2Eb h^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{3M_{AB} a^2}{2Eb h u (h + u)} + \frac{2Pe^3}{Eb h^3} + \frac{a^2 [R_A a (3h + 8u) + 3M_{AB} (h - 4u)]}{2Eb h^3 u} - \frac{9c^2 [(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB}]}{4Eb h^2 s} - \ln(c^2 h) - \frac{(R_A - P)(L - c) [3c^2 h + 8s(L - c)^2] - 3(Pe - M_{AB}) [c^2 h - 4s(L - c)^2]}{2Eb L h^3 s}. \quad (45)$$

2.3. Carga localizada de $L - c \leq x \leq L$

Sustituyendo las propiedades de la Tabla 1 en las ecuaciones (12) y (13) para cada intervalo, y resolviendo las integrales se obtienen las rotaciones en cualquier lugar (dy/dx).

Posteriormente se desarrolla la integral para obtener los desplazamientos en cualquier lugar de la viga (y). Las ecuaciones simplificadas para intervalo se muestran a continuación. Para $0 \leq x \leq a$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3a^2 \left\{ 2R_A a^4 h^2 + (R_A a - M_{AB}) u (a - x) \left[3u (a - x)^2 + 5a^2 h \right] \right\}}{2Ebh^2 u \left[a^2 h + u (a - x)^2 \right]^2} - \frac{9a (R_A a - M_{AB})}{2Ebh^2 \sqrt{hu}} \arctan \left[\frac{u (a - x)}{a \sqrt{hu}} \right] + \frac{6R_A a^2}{5Gb \left[a^2 h + u (a - x)^2 \right]} + C_1, \quad (46)$$

$$y = \left[\frac{3a \left[3u (R_A a - M_{AB}) (a - x) + R_A a^2 h \right]}{2Ebh^2 u \sqrt{hu}} - \frac{6R_A a}{5Gb \sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\frac{u (a - x)}{a \sqrt{hu}} \right] + \frac{9a^2 (R_A a - M_{AB})}{4Ebh^2 u} \ln (a^2 h) - \frac{3a^4 (R_A x - M_{AB})}{2Ebh u \left[a^2 h + u (a - x)^2 \right]} + C_1 x + C_2. \quad (47)$$

Para $a \leq x \leq L - c$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x (R_A x - 2M_{AB})}{Eb h^3} + \frac{6R_A}{5Gb h} + C_3, \quad (48)$$

$$y = \frac{2x^2 (R_A x - 3M_{AB})}{Eb h^3} + \frac{6R_A x}{5Gb h} + C_3 x + C_4. \quad (49)$$

Para $L - c \leq x \leq e$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3c^2 \left\{ 2R_A c^4 h^2 + [R_A (L - c) - M_{AB}] s (L - c - x) \left[3s (L - c - x)^2 + 5c^2 h \right] \right\}}{2Ebh^2 s \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]^2} - \frac{9c (R_A (L - c) - M_{AB})}{2Ebh^2 \sqrt{hs}} \arctan \left[\frac{s (L - c - x)}{c \sqrt{hs}} \right] + \frac{6R_A c^2}{5Gb \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]} + C_5, \quad (50)$$

$$y = \left[\frac{3c \left\{ 3s [R_A (L - c) - M_{AB}] (L - c - x) + R_A c^2 h \right\}}{2Ebh^2 s \sqrt{hs}} - \frac{6R_A c}{5Gb \sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\frac{s (L - c - x)}{c \sqrt{hs}} \right] + \frac{9c^2 [R_A (L - c) - M_{AB}]}{4Ebh^2 s} \ln (c^2 h) - \frac{3c^4 (R_A x - M_{AB})}{2Ebh s \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]} + C_5 x + C_6. \quad (51)$$

Para $e \leq x \leq L$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3c^2 \left\{ 2 (R_A - P) c^4 h^2 + [(R_A - P) (L - c) + Pe - M_{AB}] s (L - c - x) \left[3s (L - c - x)^2 + 5c^2 h \right] \right\}}{2Ebh^2 s \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]^2} - \frac{9c ((R_A - P) (L - c) + Pe - M_{AB})}{2Ebh^2 \sqrt{hs}} \arctan \left[\frac{s (L - c - x)}{c \sqrt{hs}} \right] + \frac{6 (R_A - P) c^2}{5Gb \left[c^2 h + s (L - c - x)^2 \right]} + C_7, \quad (52)$$

$$y = \left[\frac{9c[(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB}](L - c - x)}{2Ebh^2\sqrt{hs}} + \frac{9c^3(R_A - P)}{2Ebh\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5Gb\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\frac{s(L - c - x)}{c\sqrt{hs}} \right] + \quad (53)$$

$$\frac{9c^2[(R_A - P)(L - c) + Pe - M_{AB}]}{4Ebh^2s} \ln(c^2h) - \frac{3c^4((R_A - P)x + Pe - M_{AB})}{2Ebhs[c^2h + s(L - c - x)^2]} + C_7x + C_8.$$

Las ocho condiciones conocidas que debe cumplir la viga para obtener las constantes de integración son:

1. Sustituyendo la condición $x = 0$ e $y = 0$ en la ecuación (47).
2. Sustituyendo la condición $x = a$ en las ecuaciones (46) y (48), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
3. Sustituyendo la condición $x = a$ en las ecuaciones (47) y (49), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
4. Sustituyendo la condición $x = L - c$ en las ecuaciones (48) y (50), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
5. Sustituyendo la condición $x = L - c$ en las ecuaciones (49) y (51), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
6. Sustituyendo la condición $x = e$ en las ecuaciones (50) y (52), estas dos ecuaciones se igualan, porque las rotaciones " dy/dx " en este punto deben ser las mismas.
7. Sustituyendo la condición $x = e$ en las ecuaciones (51) y (53), estas dos ecuaciones se igualan, porque los desplazamientos " y " en este punto deben ser los mismos.
8. Sustituyendo la condición $x = L$ e $y = 0$ en la ecuación (53).

Sustituyendo las condiciones en las ecuaciones correspondientes, se obtienen las siguientes constantes de integración:

$$C_1 = -\frac{6R_A(L - a - c)}{5GbLh} + \left[\frac{3Pc^2[3s(L - c - e) - ch]}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} + \frac{6Pc}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\frac{s(L - c - e)}{c\sqrt{hs}} \right] + \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h + u)} +$$

$$\left[\frac{3c^2\{(R_A - P)[ch - 3s(L - c)] - 3s(Pe - M_{AB})\}}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A - P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] +$$

$$\left[\frac{3a^2[3u(R_Aa - M_{AB}) + R_Aah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{6Pc^2(L - e)}{5GbL[c^2h + s(L - c - e)^2]} -$$

$$\frac{a^2[R_Aa(3h + 8u) + 3M_{AB}(h - 4u)]}{2EbLh^3u} + \frac{3a[R_AaL(h + 2u) - 4M_{AB}Lu]}{EbLh^3u} + \quad (54)$$

$$\frac{3Pc^2(L - e)\{2c^4h^2 + s(L - c - e)^2[3s(L - c - e)^2 + 5c^2h]\}}{2EbLh^2s[c^2h + s(L - c - e)^2]^2} + \frac{3c^2[(R_A - P)L + Pe - M_{AB}]}{2EbLh^2s(h + s)} -$$

$$\frac{R_A[3c^2h(L + c) + 4s(L - c)^2(L + 2c)] - 3M_{AB}[c^2h + 4s(L^2 - c^2)]}{2EbLh^3s},$$

$$C_2 = -\left[\frac{3a^2[3u(R_Aa - M_{AB}) + R_Aah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{9a^2(R_Aa - M_{AB})}{4Ebh^2u} \ln(a^2h) - \frac{3M_{AB}a^2}{2Ebhu(h + u)}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & -\frac{6R_A(L-a-c)}{5GbLh} + \left[\frac{3Pc^2[3s(L-c-e)-ch]}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} + \frac{6Pc}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\frac{s(L-c-e)}{c\sqrt{hs}} \right] + \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h+u)} + \\
& \left[\frac{3c^2\{(R_A-P)[ch-3s(L-c)]-3s(Pe-M_{AB})\}}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A-P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \\
& \left[\frac{3a^2[3u(R_Aa-M_{AB})+R_Aah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{6Pc^2(L-e)}{5GbL[c^2h+s(L-c-e)^2]} + \\
& \frac{3Pc^2(L-e)\{2c^4h^2+s(L-c-e)^2[3s(L-c-e)^2+5c^2h]\}}{2EbLh^2s[c^2h+s(L-c-e)^2]^2} + \frac{3c^2[(R_A-P)L+Pe-M_{AB}]}{2EbLh^2s(h+s)} - \\
& \frac{R_A[3c^2h(L+c)+4s(L-c)^2(L+2c)]-3M_{AB}[c^2h+4s(L^2-c^2)]}{2EbLh^3s} - \frac{a^2[R_Aa(3h+8u)+3M_{AB}(h-4u)]}{2EbLh^3u},
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & -\frac{6R_Aa}{5GbLh} - \left[\frac{3a^2[3u(R_Aa-M_{AB})+R_Aah]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \\
& \frac{3M_{AB}a^2}{2Ebhu(h+u)} + \frac{a^2[R_Aa(3h+8u)+3M_{AB}(h-4u)]}{2EbLh^3u},
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & -\frac{6R_A(L-a-c)}{5GbLh} + \left[\frac{3Pc^2[3s(L-c-e)-ch]}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} + \frac{6Pc}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\frac{s(L-c-e)}{c\sqrt{hs}} \right] + \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h+u)} + \\
& \left[\frac{3c^2\{(R_A-P)[ch-3s(L-c)]-3s(Pe-M_{AB})\}}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A-P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \\
& \left[\frac{3a^2[3u(R_Aa-M_{AB})+R_Aah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \frac{6Pc^2(L-e)}{5GbL[c^2h+s(L-c-e)^2]} - \\
& \frac{a^2[R_Aa(3h+8u)+3M_{AB}(h-4u)]}{2EbLh^3u} + \frac{2(L-c)^2[2R_A(L-c)-3M_{AB}]}{EbLh^3} + \frac{3c^2[R_A(L-c)+M_{AB}]}{2EbLh^2s} + \\
& \frac{3c^2[(R_A-P)L+Pe-M_{AB}]}{2EbLh^2s(h+s)} + \frac{3Pc^2(L-e)\{2c^4h^2+s(L-c-e)^2[3s(L-c-e)^2+5c^2h]\}}{2EbLh^2s[c^2h+s(L-c-e)^2]^2},
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & \frac{6R_A(L-a-c)}{5GbLh} - \left[\frac{3a^2[3u(R_Aa-M_{AB})+R_Aah]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_Aa}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] - \\
& \frac{2(L-c)^2[2R_A(L-c)-3M_{AB}]}{Ebh^3} - \frac{3c^2[R_A(L-c)+M_{AB}]}{2EbLh^2s} + \frac{a^2[R_Aa(3h+8u)+3M_{AB}(4u-h)]}{2Ebh^3u} - \\
& \frac{9c^2[R_A(L-c)-M_{AB}]}{4Ebh^2s} \ln(c^2h) - \frac{3M_{AB}a^2}{2Ebhu(h+u)},
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
C_7 = & -\frac{6R_A(L-a-c)}{5GbLh} - \left[\frac{3Pc[3s(L-c-e)(L-c)+c^2h]}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6Pc}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\frac{s(L-c-e)}{c\sqrt{hs}} \right] + \\
& \frac{3M_{AB}a^2}{2EbLhu(h+u)} + \left[\frac{3c^2\{(R_A-P)[ch-3s(L-c)]-3s(Pe-M_{AB})\}}{2EbLh^2s\sqrt{hs}} - \frac{6(R_A-P)c}{5GbL\sqrt{hs}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{s}{h}} \right] + \\
& \frac{3c^2[(R_A-P)L+Pe-M_{AB}]}{2EbLh^2s(h+s)} + \left[\frac{3a^2[3u(R_{AA}-M_{AB})+R_Aah]}{2EbLh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_{AA}}{5GbL\sqrt{hu}} \right] \arctan \left[\sqrt{\frac{u}{h}} \right] + \\
& \frac{6Pc^2e}{5GbL[c^2h+s(L-c-e)^2]} + \frac{2(L-c)^2[2R_A(L-c)-3M_{AB}]}{EbLh^3} + \frac{3c^2[R_A(L-c)+M_{AB}]}{2EbLh^2s} - \\
& \frac{a^2[R_{AA}(3h+8u)+3M_{AB}(h-4u)]}{2EbLh^3u} - \frac{3Pc^2e\{2c^4h^2+s(L-c-e)^2[3s(L-c-e)^2+5c^2h]\}}{2EbLh^2s[c^2h+s(L-c-e)^2]^2},
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
C_8 = & \frac{6(R_A-P)(L-c)}{5Gbhh} - \frac{6Pc^2e}{5Gb[c^2h+s(L-c-e)^2]} - \left[\frac{3a^2[3u(R_{AA}-M_{AB})+R_Aah]}{2Ebh^2u\sqrt{hu}} - \frac{6R_{AA}}{5Gb\sqrt{hu}} \right] \\
& \arctan \left[\frac{s(L-c-e)}{c\sqrt{hs}} \right] - \frac{3c^2[R_A(L-c)+M_{AB}]}{2Ebh^2s} + \frac{a^2[R_{AA}(3h+8u)+3M_{AB}(h-4u)]}{2Ebh^3u} + \\
& \frac{3Pc^2e\{2c^4h^2+s(L-c-e)^2[3s(L-c-e)^2+5c^2h]\}}{2Ebh^2s[c^2h+s(L-c-e)^2]^2} - \frac{2(L-c)^2[2R_A(L-c)-3M_{AB}]}{Ebh^3} - \\
& \frac{9c^2[(R_A-P)(L-c)+Pe-M_{AB}]}{4Ebh^2s} \ln(c^2h) - \frac{3M_{AB}a^2}{2Ebhhu(h+u)}.
\end{aligned} \tag{61}$$

3. Aplicación del modelo propuesto

Una manera de verificar la continuidad del modelo propuesto es como siguiente:

1. Sustituyendo el valor de " $x = a$ " en las ecuaciones (16) y (18) (Cuando la carga se localiza de $e \leq x \leq a$), en la ecuación (30) y (32) (Cuando la carga se localiza de $a \leq x \leq L-c$), en la ecuación (46) y (48) (Cuando la carga se localiza de $L-c \leq x \leq L$), las rotaciones obtenidas de las dos ecuaciones son iguales.
2. Sustituyendo el valor de " $x = L-c$ " en las ecuaciones (18) y (20) (Cuando la carga se localiza de $0 \leq x \leq a$), en la ecuación (34) y (36) (Cuando la carga se localiza de $a \leq x \leq L-c$), en la ecuación (48) y (50) (Cuando la carga se localiza de $L-c \leq x \leq e$), se obtienen las mismas rotaciones en ambos casos.
3. Sustituyendo el valor de " $x = e$ " en las ecuaciones (14) y (16) (Cuando la carga se localiza de $0 \leq x \leq a$), en la ecuación (32) y (34) (Cuando la carga se localiza de $a \leq x \leq L-c$), en la ecuación (50) y (52) (Cuando la carga se localiza de $L-c \leq x \leq e$), las rotaciones obtenidas de las dos ecuaciones son iguales.
4. Sustituyendo el valor de " $x = a$ " en las ecuaciones (17) y (19) (Cuando la carga se localiza de $e \leq x \leq a$), en la ecuación (31) y (33) (Cuando la carga se localiza de $a \leq x \leq L-c$), en la ecuación (47) y (49) (Cuando la carga se localiza de $L-c \leq x \leq L$), los desplazamientos obtenidos de las dos ecuaciones son iguales.
5. Sustituyendo el valor de " $x = L-c$ " en las ecuaciones (19) y (21) (Cuando la carga se localiza de $0 \leq x \leq a$), en la ecuación (35) y (37) (Cuando la carga se localiza de

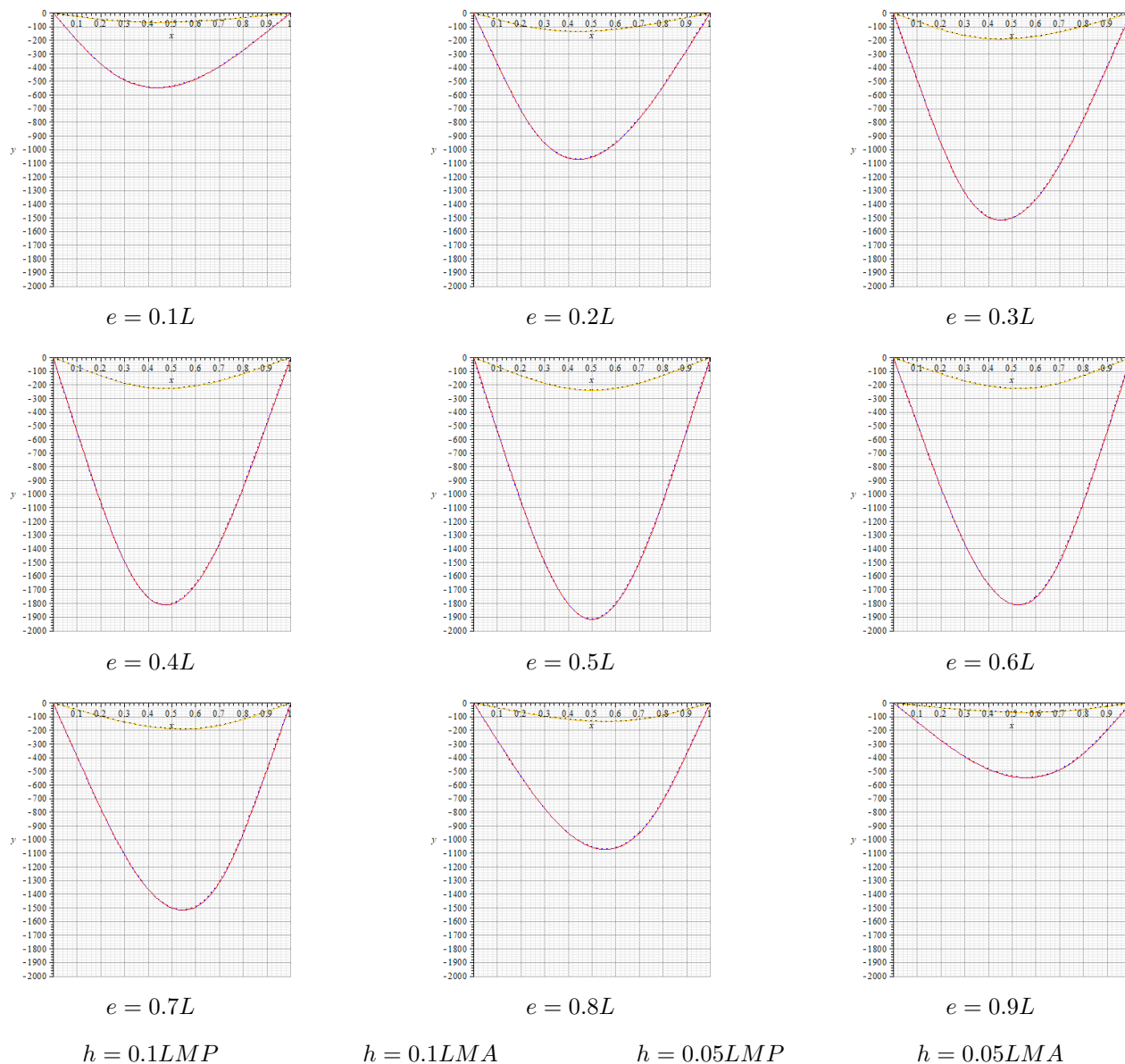


Fig. 3. Curva elástica en vigas simplemente apoyadas

$a \leq x \leq L - c$), en la ecuación (49) y (51) (Cuando la carga se localiza de $L - c \leq x \leq e$), los desplazamientos obtenidos de las dos ecuaciones son iguales.

6. Sustituyendo el valor de “ $x = e$ ” en las ecuaciones (15) y (17) (Cuando la carga se localiza de $0 \leq x \leq a$), en la ecuación

(33) y (35) (Cuando la carga se localiza de $a \leq x \leq L - c$), en la ecuación (51) y (53) (Cuando la carga se localiza de $L - c \leq x \leq e$), los desplazamientos obtenidos de las dos ecuaciones son iguales.

Una manera de verificar el modelo propuesto en algunos puntos especiales es como siguiente:

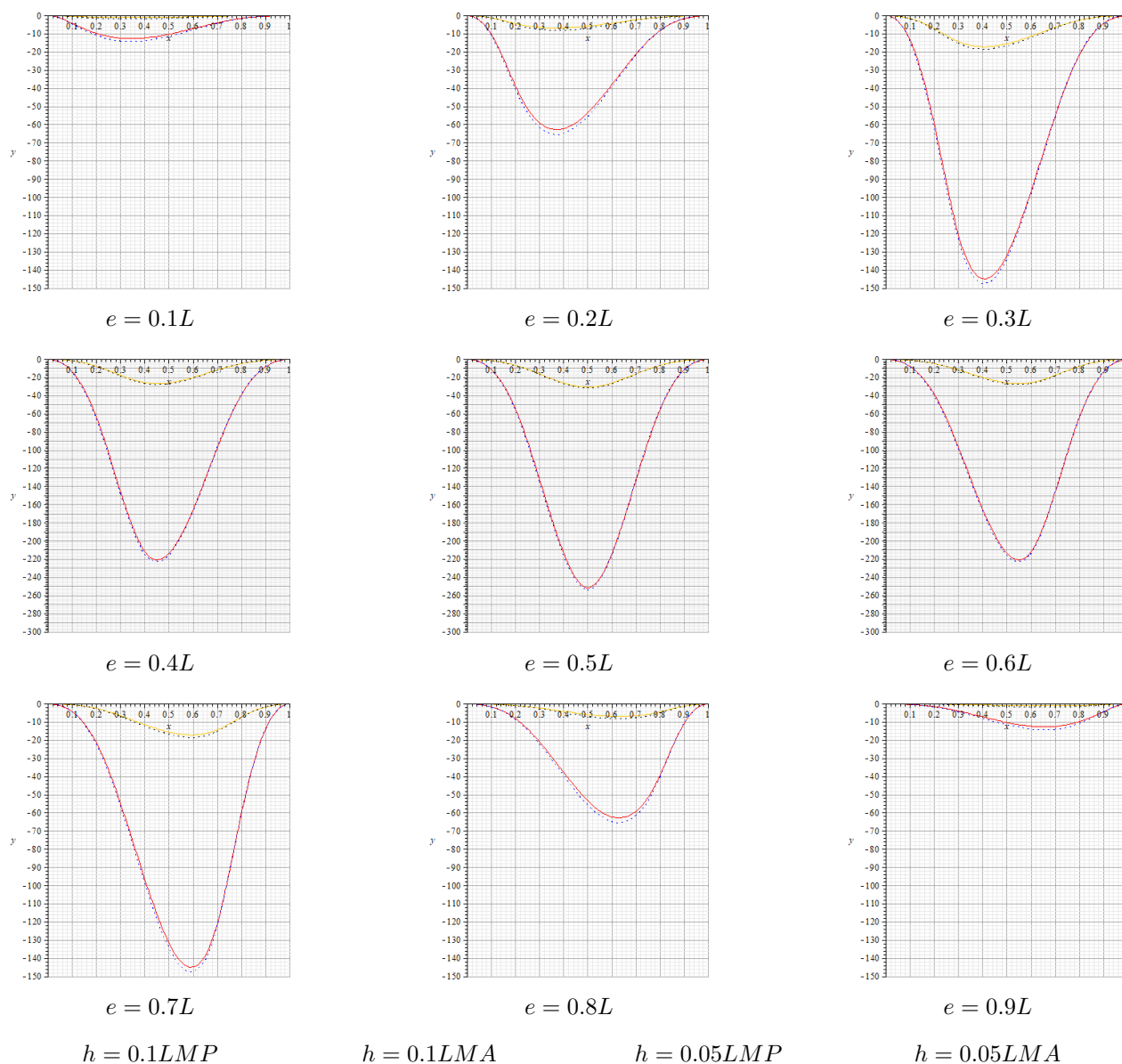


Fig. 4. Curva elástica en vigas perfectamente fijadas en sus extremos

1. Sustituyendo el valor de " $x = 0$ " en las ecuaciones (15), (31) y (47) se obtiene el desplazamiento cero en el apoyo A.
2. Sustituyendo el valor de " $x = L$ " en las ecuaciones (21), (37) y (53) se obtiene el desplazamiento cero en el apoyo B.
3. Sustituyendo el valor de $M_{AB} = 0$, $R_A = P/2$, $e = L/2$, $a = c$, $u = s$ y $dy/dx = 0$ para vigas de sección transversal rectangular simplemente apoyadas en las ecuaciones (32) y (34) se obtiene " $x = L/2$ ", es decir, cuando la rotación es cero, se produce el desplazamiento máximo (viga simétrica).

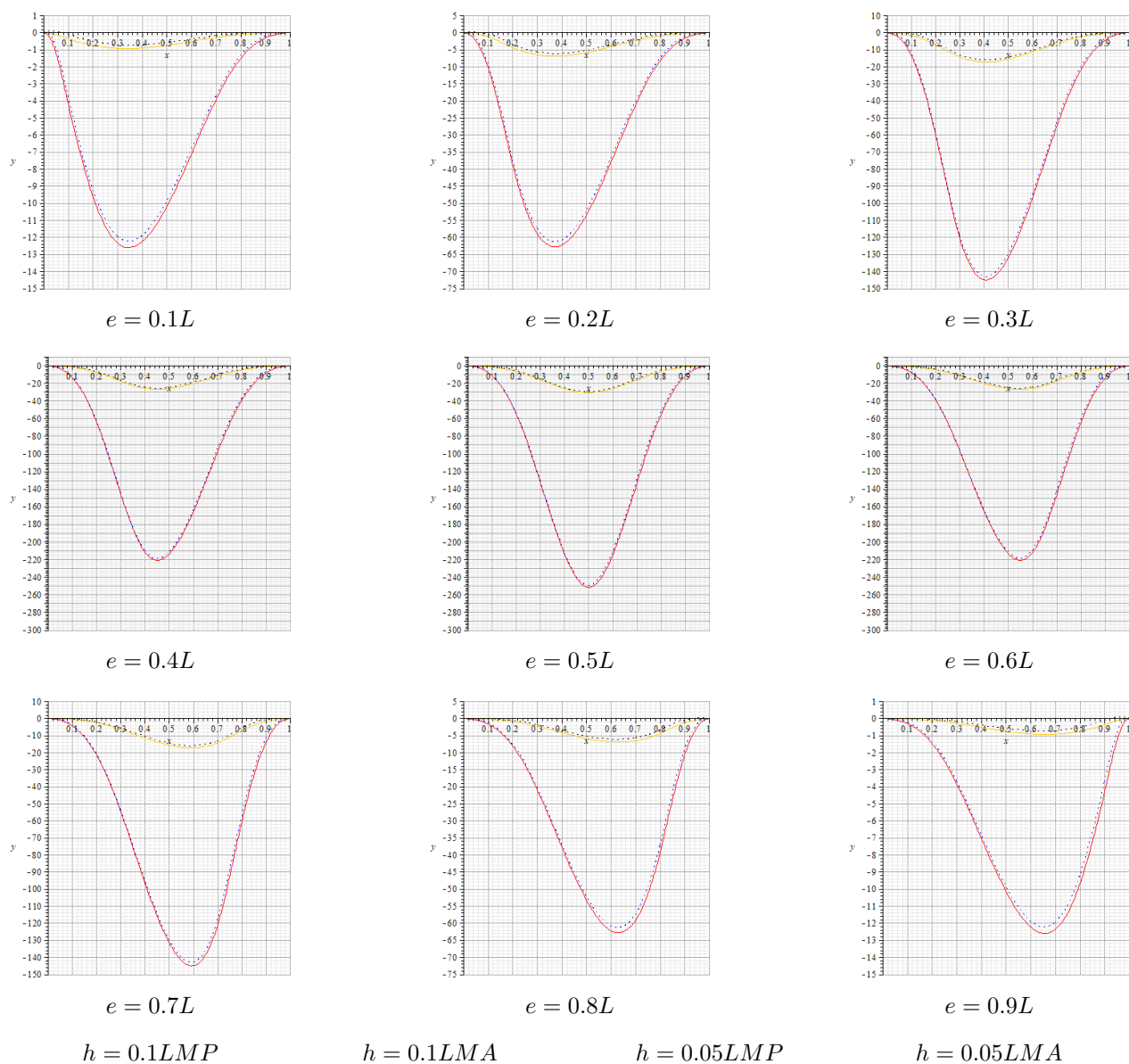


Fig. 5. Curva elástica en vigas usando los mismos momentos y reacciones en los extremos

La curva elástica para vigas rectangulares con cartelas parabólicas bajo carga concentrada situada en cualquier parte de la viga se obtiene, sustituyendo en las ecuaciones correspondientes de la siguiente manera:

1. Para vigas simplemente apoyadas:

$$- M_{AB} = 0,$$

$$- R_{AB} = 0.9P(e = 0.1L), 0.8P(e = 0.2L), \\ 0.7P(e = 0.3L), 0.6P(e = 0.4L), \\ 0.5P(e = 0.5L), 0.4P(e = 0.6L), \\ 0.3P(e = 0.7L), 0.2P(e = 0.8L), \\ 0.1P(e = 0.9L),$$

$$- G = 5E/12,$$

Tabla 2. Deflexiones en vigas simplemente apoyadas

e	Factores de las rotaciones en el apoyo A y en el apoyo B						Factores del desplazamiento máximo y su ubicación a partir del apoyo A					
	β_{AB}			β_{BA}			ϵ			ρ		
	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA
	$h = 0.1L, a = 0.3L, c = 0.3L$											
0.1L	256.5180	252.3370	1.0166	-174.3076	-172.9501	1.0078	0.4398	0.4397	1.0002	-68.3887	-68.2495	1.0020
0.2L	475.7573	467.5538	1.0175	-344.4126	-341.0962	1.0097	0.4429	0.4432	0.9993	-134.4296	-133.8157	1.0046
0.3L	623.7549	614.4166	1.0152	-496.1313	-491.1697	1.0101	0.4532	0.4535	0.9993	-190.3910	-189.4294	1.0051
0.4L	687.8740	679.6049	1.0122	-612.2122	-605.9814	1.0103	0.4724	0.4725	0.9998	-227.2434	-226.3062	1.0041
0.5L	679.9931	672.7931	1.0107	-679.9931	-672.7931	1.0107	0.5000	0.5000	1.0000	-240.2943	-239.3673	1.0039
0.6L	612.2122	605.9814	1.0103	-687.8740	-679.6049	1.0122	0.5276	0.5275	1.0002	-227.2434	-226.3062	1.0041
0.7L	496.1313	491.1697	1.0101	-623.7549	-614.4166	1.0152	0.5468	0.5465	1.0005	-190.3910	-189.4294	1.0051
0.8L	344.4126	341.0962	1.0097	-475.7573	-467.5538	1.0175	0.5571	0.5568	1.0005	-134.4296	-133.8157	1.0046
0.9L	174.3076	172.9501	1.0078	-256.5180	-252.3370	1.0166	0.5602	0.5603	0.9998	-68.3887	-68.2495	1.0020
	$h = 0.05L, a = 0.3L, c = 0.3L$											
0.1L	2027.0581	2018.6962	1.0041	-1386.3156	-1383.6005	1.0020	0.4397	0.4397	1.0000	-546.3744	-545.9960	1.0007
0.2L	3756.8373	3740.4302	1.0044	-2735.4021	-2728.7693	1.0024	0.4432	0.4432	1.0000	-1071.7534	-1070.5257	1.0011
0.3L	4934.0093	4915.3326	1.0038	-3939.1808	-3929.3574	1.0025	0.4535	0.4535	1.0000	-1517.3580	-1515.4349	1.0013
0.4L	5453.3772	5436.8388	1.0030	-4860.4556	-4847.8512	1.0026	0.4725	0.4725	1.0000	-1812.3238	-1810.4492	1.0010
0.5L	5396.7450	5382.3450	1.0027	-5396.7450	-5382.3450	1.0027	0.5000	0.5000	1.0000	-1916.7922	-1914.9380	1.0010
0.6L	4860.4556	4847.8512	1.0026	-5453.3772	-5436.8388	1.0030	0.5275	0.5275	1.0000	-1812.3238	-1810.4492	1.0010
0.7L	3939.1808	3929.3574	1.0025	-4934.0093	-4915.3326	1.0038	0.5465	0.5465	1.0000	-1517.3580	-1515.4349	1.0013
0.8L	2735.4021	2728.7693	1.0024	-3756.8373	-3740.4302	1.0044	0.5568	0.5568	1.0000	-1071.7534	-1070.5257	1.0011
0.9L	1386.3156	1383.6005	1.0020	-2027.0581	-2018.6962	1.0041	0.5603	0.5603	1.0000	-546.2744	-545.9960	1.0007

donde: θ_{AB} (rotación en el apoyo A) = $\beta_{AB}P/Eb$; θ_{BA} (rotación en el apoyo B) = $\beta_{BA}P/Eb$; x_{AB} (ubicación del momento máximo a partir del apoyo A) = ϵL ; y_{max} (desplazamiento máximo) = $\rho P/Eb$

$$- a = 0.3L,$$

$$- u = h,$$

$$- c = 0.3L,$$

$$- s = h,$$

$$- h = 0.05L, 0.1L.$$

Para los dos modelos, el MP (Modelo propuesto considera las deformaciones por flexión y cortante) y el MA (Modelo actual considera las deformaciones por flexión).

2. Para vigas perfectamente fijadas en sus extremos: El momento M_{AB} y la reacción R_A en el apoyo "A" se obtienen sustituyendo en las ecuaciones correspondientes:

$$- dy/dx = 0,$$

$$- x = 0, L,$$

$$- G = 5E/12,$$

$$- a = 0.3L,$$

$$- u = h,$$

$$- c = 0.3L,$$

$$- s = h,$$

$$- e = 0.1L, 0.2L, 0.3L, 0.4L, 0.5L, 0.6L, 0.7L, 0.8L, 0.9L$$

$$- h = 0.05L, 0.1L.$$

De los dos modelos (MP y MA), estas dos ecuaciones se resuelven para obtener " $M_{AB} = m_{AB}PL$ " y la reacción " $R_A = r_{AB}P$ " en el apoyo A. Posteriormente, sustituyendo los valores de M_{AB} y R_A para los dos modelos:

$$- G = 5E/12,$$

Tabla 3. Deflexiones en vigas perfectamente fijadas en sus extremos

e	Factores para momentos y reacciones en el apoyo A						Factores del desplazamiento máximo y su ubicación a partir del apoyo A					
	m_{AB}			α_{AB}			ϵ			ρ		
	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA
$h = 0.1L, a = 0.3L, c = 0.3L$												
0.1L	0.0966	0.0932	1.0365	0.9943	0.9889	1.0055	0.3383	0.3452	0.9800	-0.9263	-1.7891	0.5177
0.2L	0.1694	0.1635	1.0361	0.9507	0.9416	1.0097	0.3687	0.3714	0.9927	-6.8415	-8.1793	0.8364
0.3L	0.2016	0.1958	1.0296	0.8463	0.8380	1.0099	0.4071	0.4079	0.9980	-17.0884	-18.4643	0.9255
0.4L	0.1925	0.1886	1.0207	0.6869	0.6825	1.0064	0.4507	0.4507	1.0000	-26.5992	-27.9204	0.9527
0.5L	0.1560	0.1543	1.0110	0.5000	0.5000	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	-30.4482	-31.7431	0.9592
0.6L	0.1056	0.1062	0.9944	0.3131	0.3175	0.9861	0.5493	0.5493	1.0000	-26.5992	-27.9204	0.9527
0.7L	0.0553	0.0578	0.9567	0.1537	0.1620	0.9488	0.5929	0.5921	1.0014	-17.0884	-18.4643	0.9255
0.8L	0.0187	0.0219	0.8539	0.0493	0.0584	0.8442	0.6313	0.6286	1.0043	-6.8415	-8.1793	0.8364
0.9L	0.0022	0.0043	0.5116	0.0057	0.0111	0.5135	0.6617	0.6548	1.0105	-0.9263	-1.7191	0.5177
$h = 0.05L, a = 0.3L, c = 0.3L$												
0.1L	0.0940	0.0932	1.0086	0.9902	0.9889	1.0013	0.3441	0.3452	0.9968	-12.5921	-14.3128	0.8798
0.2L	0.1650	0.1635	1.0092	0.9439	0.9416	1.0024	0.3708	0.3714	0.9984	-62.7547	-65.4342	0.9591
0.3L	0.1972	0.1958	1.0072	0.8401	0.8380	1.0025	0.4077	0.4079	0.9995	-144.9686	-147.7146	0.9814
0.4L	0.1896	0.1886	1.0053	0.6836	0.6825	1.0016	0.4507	0.4507	1.0000	-220.7226	-223.3631	0.9882
0.5L	0.1547	0.1543	1.0026	0.5000	0.5000	1.0000	0.5000	0.5000	1.0000	-251.3548	-253.9444	0.9898
0.6L	0.1061	0.1062	0.9991	0.3164	0.3175	0.9965	0.5493	0.5493	1.0000	-220.7226	-223.3631	0.9882
0.7L	0.0572	0.0578	0.9896	0.1599	0.1620	0.9870	0.5923	0.5921	1.0003	-144.9686	-147.7146	0.9814
0.8L	0.0211	0.0219	0.9635	0.0561	0.0584	0.9606	0.6292	0.6286	1.0009	-62.7547	-65.4342	0.9591
0.9L	0.0038	0.0043	0.8837	0.0098	0.0111	0.8829	0.6559	0.6548	1.0017	-12.5921	-14.3128	0.8798

dónde: M_{AB} (momento de empotramiento en el apoyo A) = $m_{AB}PL$; R_A (reacción en el apoyo A) = $\alpha_{AB}P$

- $a = 0.3L$,
- $u = h$,
- $c = 0.3L$,
- $s = h$,
- $e = 0.1L, 0.2L, 0.3L, 0.4L, 0.5L, 0.6L, 0.7L, 0.8L, 0.9L$
- $h = 0.05L, 0.1L$.

3. Para vigas usando los mismos momentos y reacciones son del modelo propuesto para los dos modelos.

La Figura 3 muestra la curva elástica para vigas rectangulares simplemente apoyadas con cartelas parabólicas bajo carga concentrada situada en cualquier parte de la viga para los dos modelos (MP y MA).

La Figura 4 muestra la curva elástica para vigas perfectamente fijadas en sus extremos con cartelas parabólicas bajo carga concentrada situada en cualquier parte de la viga para los dos modelos (MP y MA).

La Figura 5 muestra la curva elástica para vigas usando los mismos momentos y reacciones en sus extremos del modelo propuesto con cartelas parabólicas bajo carga concentrada situada en cualquier parte de la viga para los dos modelos (MP y MA).

4. Resultados

Los valores de la curva elástica (deflexiones) para la viga simplemente apoyada es mayor para el modelo propuesto con respecto al modelo actual para $h = 0.1L$ y $h = 0.05L$, y los valores mayores se presentan para $h = 0.05L$ (ver Figura 3).

Tabla 4. Deflexiones en vigas usando los momentos del modelo propuesto para los dos modelos

e	Factores de las rotaciones en el apoyo A y en el apoyo B				Factores del desplazamiento máximo y su ubicación a partir del apoyo A					
	β_{AB}		β_{BA}		ϵ			ρ		
	MP	MA	MP	MA	MP	MA	MP/MA	MP	MA	MP/MA
$h = 0.1L, a = 0.3L, c = 0.3L$										
0.1L	0	-5.1895	0	0.3489	0.3383	0.3535	0.9570	-0.9263	-0.7409	1.2502
0.2L	0	-9.8149	0	1.7051	0.3687	0.3754	0.9822	-6.8415	-6.1251	1.1170
0.3L	0	-10.9028	0	3.4972	0.4071	0.4101	0.9927	-17.0884	-16.0440	1.0651
0.4L	0	-9.1986	0	5.2014	0.4507	0.4516	0.9980	-26.5992	-25.6383	1.0375
0.5L	0	-7.2000	0	7.2000	0.5000	0.5000	1.0000	-30.4482	-29.5211	1.0314
0.6L	0	-5.2014	0	9.1986	0.5493	0.5484	1.0016	-26.5992	-25.6383	1.0375
0.7L	0	-3.4972	0	10.9028	0.5929	0.5899	1.0051	-17.0884	-16.0440	1.0651
0.8L	0	-1.7051	0	9.8149	0.6313	0.6246	1.0107	-6.8415	-6.1251	1.1170
0.9L	0	-0.3489	0	5.1895	0.6617	0.6465	1.0235	-0.9263	-0.7409	1.2502
$h = 0.05L, a = 0.3L, c = 0.3L$										
0.1L	0	-10.2916	0	0.7854	0.3441	0.3461	0.9942	-12.5921	-12.2257	1.0300
0.2L	0	-19.4833	0	3.5567	0.3708	0.3722	0.9962	-62.7547	-61.3273	1.0233
0.3L	0	-21.6718	0	7.1282	0.4077	0.4084	0.9983	-144.9686	-142.8824	1.0146
0.4L	0	-18.3250	0	10.4750	0.4507	0.4509	0.9996	-220.7226	-218.8014	1.0088
0.5L	0	-14.4000	0	14.4000	0.5000	0.5000	1.0000	-251.3548	-249.5006	1.0074
0.6L	0	-10.4750	0	18.3250	0.5493	0.5491	1.0004	-220.7226	-218.8014	1.0088
0.7L	0	-7.1282	0	21.6718	0.5923	0.5916	1.0012	-144.9686	-142.8824	1.0146
0.8L	0	-3.5567	0	19.4833	0.6292	0.6278	1.0022	-62.7547	-62.3273	1.0233
0.9L	0	-0.7854	0	10.2916	0.6559	0.6539	1.0031	-12.5921	-12.2257	1.0300

Para la viga perfectamente fijada en sus extremos es mayor para el modelo actual con respecto al modelo propuesto para $h = 0.1L$ y un valor de $h = 0.05L$, y los valores mayores son para $h = 0.05L$ (ver Figura 4).

Para la viga usando los momentos del modelo propuesto para los dos modelos es mayor para el modelo propuesto con respecto al modelo actual para $h = 0.1L$ y $h = 0.05L$, y los valores mayores son para $h = 0.05L$ (ver Figura 5).

La Tabla 2 muestra la comparación de los dos modelos para obtener los factores para las rotaciones en los apoyos y los desplazamientos máximos para una viga simplemente apoyada.

Estas comparaciones se realizan para $G = 5E$; $h = 0.1L$ además de $h = 0.05L$. La Tabla 2 muestra lo siguiente:

1. Las rotaciones y desplazamientos son mayores en el modelo propuesto con respecto al modelo actual.
2. Las rotaciones mayores aparecen cuando la carga P se ubica en $e = 0.4L$ para θ_{AB} , y cuando la carga P se ubica en $e = 0.6L$ para θ_{BA} para los dos modelos ($h = 0.1L$ y $h = 0.05L$).
3. La diferencia mayor de las rotaciones para los dos modelos aparecen en $e = 0.2L$ en θ_{BA} de 1.0175 y $e = 0.8L$ en θ_{BA} de 1.0175 para

$h = 0.1L$, y en $e = 0.2L$ en θ_{BA} de 1.0044 y $e = 0.8L$ en θ_{BA} de 1.0044 para $h = 0.05L$.

4. Los desplazamientos máximos aparecen cuando la carga P se ubica en $e = 0.5L$ para los dos modelos ($h = 0.1L$ y $h = 0.05L$).
5. La diferencia mayor de los desplazamientos máximos para los dos modelos aparecen en $e = 0.3L$ y $e = 0.7L$. Para $h = 0.1L$ es de 1.0051 y para $h = 0.05L$ es de 1.0013.

La Tabla 3 muestra la comparación de los dos modelos para obtener los factores para las rotaciones en los apoyos y los desplazamientos máximos para una viga empotrada en ambos extremos. Estas comparaciones se realizan para $G = 5E$; $h = 0.1L$ y $h = 0.05L$. La Tabla 3 muestra lo siguiente:

1. Los momentos M_{AB} y las reacciones R_A en el modelo propuesto son mayores desde $e = 0.1L$ hasta $e = 0.5L$ y son menores desde $e = 0.6L$ hasta $e = 0.9L$ con respecto al modelo actual.
2. Los momentos M_{AB} mayores aparecen cuando la carga P se ubica en $e = 0.3L$ para los dos modelos con $h = 0.1L$ y $h = 0.05L$.
3. Las reacciones R_A mayores aparecen cuando la carga P se ubica en $e = 0.1L$ para los dos modelos con $h = 0.1L$ y $h = 0.05L$.
4. Los desplazamientos máximos en el modelo actual son mayores con respecto al modelo propuesto.
5. Los desplazamientos máximos aparecen cuando la carga P se ubica en $e = 0.5L$ para los dos modelos ($h = 0.1L$ y $h = 0.05L$).
6. La mayor diferencia de los desplazamientos máximos entre los dos modelos aparece en $e = 0.1L$ y $e = 0.9L$. Para $h = 0.1L$ es de 0.5177 y para $h = 0.05L$ es de 0.8798.

La Tabla 4 muestra la comparación de los dos modelos para obtener los factores para las rotaciones en los apoyos y los desplazamientos máximos para una viga usando los momentos del modelo propuesto para los dos modelos. Estas comparaciones se realizan para $G = 5E$; $h = 0.1L$

además de $h = 0.05L$. Los resultados mostrados en la Tabla 4 son los siguientes:

1. Las rotaciones en el modelo propuesto son cero, porque los momentos son para vigas perfectamente fijadas en sus extremos.
2. Las rotaciones máximas aparecen en $e = 0.3L$ para el apoyo A y en $e = 0.7L$ para el apoyo B en el modelo actual ($h = 0.1L$ y $h = 0.05L$).
3. Los desplazamientos máximos en el modelo propuesto son mayores con respecto al modelo actual.
4. Los desplazamientos máximos aparecen cuando la carga P se ubica en $e = 0.5L$ para los dos modelos ($h = 0.1L$ y $h = 0.05L$).
5. La mayor diferencia de los desplazamientos máximos entre los dos modelos aparece en $e = 0.1L$ y $e = 0.9L$. Para $h = 0.1L$ es de 1.2502 y para $h = 0.05L$ es de 1.0300.

5. Conclusiones

El modelo presentado en este documento para una viga de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas bajo una carga concentrada localizada en cualquier parte de la viga y momentos en los extremos para obtener las rotaciones, los desplazamientos y la curva elástica, considerando las deformaciones por flexión y cortante (teoría de Timoshenko) ha sido desarrollado para el caso general. Las principales conclusiones son:

1. En el modelo actual la relación " h/L " no influye:
 - a) Para vigas simplemente apoyadas, la posición de la carga.
 - b) Para vigas empotradas en sus extremos, los momentos, las reacciones en los apoyos y la posición de la carga.
2. El modelo propuesto es mayor con respecto al modelo actual para las rotaciones en los apoyos y los desplazamientos máximos, cuando se presentan los mismos momentos en los extremos.

3. El modelo propuesto supera al actual en el intervalo de $e = 0.1L$ a $e = 0.5L$, mientras que es inferior entre $e = 0.6L$ y $e = 0.9L$ para los momentos M_{AB} y las reacciones R_A , cuando la viga está perfectamente fijada en ambos extremos.
4. El modelo propuesto es menor con respecto al modelo actual para los desplazamientos máximos, cuando la viga está perfectamente fijada en sus extremos.

Los desplazamientos máximos por el modelo propuesto que considera las deformaciones por flexión y cortante son mayores para vigas con los mismos momentos en los extremos, y son menores para vigas perfectamente fijadas en sus extremos respecto al modelo actual que considera las deformaciones por flexión.

Por lo tanto, las deflexiones máximas que actúan sobre las vigas del modelo propuesto en este trabajo deben compararse con las deflexiones máximas permitidas por los códigos de construcción, porque en algunas condiciones podría ser que no cumpla con los estándares establecidos por los códigos de construcción.

Entonces, el modelo propuesto es más apropiado y seguro con respecto al modelo actual para el análisis estructural, debido a que los esfuerzos cortantes y los momentos flectores están presentes en cualquier tipo de estructura y aparecen deformaciones por flexión y cortante. Las sugerencias para investigaciones futuras pueden ser:

1. Cuando la sección transversal de la viga sea una I o T.
2. Cuando la carga aplicada es diferente a una carga concentrada o carga uniformemente distribuida.

6. Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila. Los autores también agradecen a

los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. El estudiante de doctorado Rogelio Barraza Saucedo (CVU: 1013684) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico.

Referencias

1. **Banerjee, A., Bhattacharya, B., Mallik, A. (2008).** Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43, No. 5, pp. 366–376. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2007.12.020.
2. **Borboni, A., De-Santis, D. (2014).** Large deflection of a non-linear, elastic, asymmetric ludwick cantilever beam subjected to horizontal force, vertical force and bending torque at the free end. *Meccanica*, Vol. 49, No. 6. DOI: 10.1007/s11012-014-9895-z.
3. **Brojan, M., Cebron, M., Kosel, F. (2012).** Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end. *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 28, No. 3, pp. 863–869. DOI: 10.1007/s10409-012-0053-3.
4. **Chen, L. (2010).** An integral approach for large deflection cantilever beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 3, pp. 301–305. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004.
5. **Crispín-Herrera, C. Y., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2021).** Design aids for beams of rectangular cross section with parabolic haunches: Part 1. *Computación y Sistemas*, Vol. 25, No. 3, pp. 633-646. DOI: 10.13053/cys-25-3-3777.
6. **Dado, M., Al-Sadder, S. (2005).** A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams. *Mechanics Research Communications*, Vol. 32, No. 6, pp. 692–703. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2005.01.004.

7. **Debnath, V., Debnath, B. (2014).** Deflection and stress analysis of a beam on different elements using ANSYS APDL. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*, Vol. 5, No. 6, pp. 70-79.
8. **Gaona-Tamez, L. L., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Jaramillo-Rosales, M. (2020).** Design aids for rectangular cross-section beams with straight haunches: Part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 1929–1942. DOI: 10.24507/ijicic.16.06.1929.
9. **Lee, K. (2002).** Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, No. 3, pp. 439–443. DOI: 10.1016/s0020-7462(01)00019-1.
10. **Luévanos-Rojas, A., García-Canales, E., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2020).** Minimum cost for reinforced concrete rectangular beams with parabolic haunches. *Computación y Sistemas*, Vol. 24, No. 3, pp. 1063–1073. DOI: 10.13053/cys-24-3-3306.
11. **Luévanos-Rojas, A., Luévanos-Soto, R. M., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2021).** Design aids for beams of rectangular cross section with parabolic haunches: Part 2. *Computación y Sistemas*, Vol. 25, No. 4, pp. 821–834. DOI: 10.13053/cys-25-4-3778.
12. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 3, pp. 973–985. DOI: 10.24507/ijicic.12.03.959.
13. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 4, pp. 1027–1041. DOI: 10.24507/ijicic.12.04.1027.
14. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Kalashnikov, V. (2014).** A mathematical model of elastic curve for simply supported beams subjected to a uniformly distributed load taking into account the shear deformations. *ICIC Express Letters Part B: Applications*, Vol. 5, No. 3, pp. 885–890.
15. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Kalashnikov, V. V. (2020).** Optimal design of reinforced concrete beams for rectangular sections with straight haunches. *Revista de la construcción*, Vol. 19, No. 1, pp. 90–102. DOI: 10.7764/rdic.19.1.90-102.
16. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Kalashnikov, V. V. (2016).** A mathematical model of elastic curve for simply supported beams subjected to a concentrated load taking into account the shear deformations. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 1, pp. 41–54. DOI: 10.24507/ijicic.12.01.41.
17. **Majumder, G., Kumar, K. (2013).** Deflection and stress analysis of a simply supported beam and its validation using ANSYS. *International Journal of Mechanical Engineering and Computer Applications*, Vol. 1, No. 5, pp. 17–20.
18. **Montano-Perez, B. E., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., Jaramillo-Rosales, M. (2020).** Design aids for rectangular cross-section beams with straight haunches: Part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 1915–1928. DOI: 10.24507/ijicic.16.06.1915.
19. **Sandoval-Rivas, R., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019)** Modelado para trabes de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: parte 2. *Computación y*

Sistemas, Vol. 23, No. 3, pp. 1115–1124.
DOI: 10.13053/cys-23-3-2873.

20. **Sihua, D., Ze, Q., Li, W. (2015).** Nonlinear analysis of reinforced concrete beam bending failure experimentation based on abaqus. International Conference on Information Sciences, Machinery, Materials and Energy, pp. 440–444. DOI: 10.2991/icismme-15.2015.88.
21. **Solano-Carrillo, E. (2009).** Semi-exact solutions for large deflections of cantilever beams of non-linear elastic behaviour. International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 44, No. 2, pp. 253–256. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.007.
22. **Timoshenko, S. P. (1947).** Strength of Materials. Part I: Elementary Theory and Problems, 2nd Edition, Van Nostrand Company, Inc., New York.
23. **Timoshenko, S. P., Gere, J. M. (1972).** Mechanics of materials. Van Nostrand Reinhold, New York.
24. **Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modeling for beams of rectangular cross section with parabolic haunches: Part 1. Computación y Sistemas, Vol. 23, No. 2, pp. 557–568. DOI: 10.13053/cys-23-2-2872.
25. **Yau, J. (2010).** Closed-form solutions of large deflection for a guyed cantilever column pulled by an inclination cable. Journal of Marine Science and Technology, Vol. 18, No. 1. DOI: 10.51400/2709-6998.1874.

Article received on 10/01/2023; accepted on 08/04/2024.

**Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.*