Computación y Sistemas Vol. 5 No. 4 pp. 277 - 287
© 2002, CIC - IPN. *ISSN 1405-5546* Impreso en México

Un Método para Resolver Problemas de Decisión a Partir de Una Modelación Flexible de Preferencias Basada en Lógica Borrosa

A Method for Solving Decision Problems Using a Flexible Modelling of Preferences Based on Fuzzy Logic

Eduardo Fernández González y Juan Carlos Leyva López
Universidad Autónoma de Sinaloa, Presa Tacotán 887-4, Col. Las Quintas, Culiacán, Sinaloa
e -mail : {eddyf, jleyva}@uas.uasnet.mx

Articulo recibido en agosto 11, 2000; aceptado en marzo 14, 2002

Abstract

The concept of rational decision agent has privileged the normative approach of decision making, based on a set of rigid axioms which require several ideal conditions seldom given in the practice of decision aiding. On the other hand, there are several more flexible methods based on building up fuzzy preference relations, but they do not perform well in presence of irrelevant alternatives or in case of complex graphs. We present a new method based on multiobjective optimization for improving the quality of the final ranking derived from a fuzzy preference relation, which can be a suitable tool for decision agents. A new concept of "irrelevant alternative" is introduced. This proposal performs very well in the sense of quality of solutions as well as in relation to irrelevant alternatives. It can be seen as an intent of conciliating two opposite approaches of decision aid.

Key words: decision agent, ranking, fuzzy preference relation, multiobjective optimization, outranking, irrelevant alternatives

Resumen

En la concepción del agente racional ha predominado la escuela normativa de la decisión, basada en un sistema axiomático que impone condiciones ideales al comportamiento del decisor humano, las que casi nunca se cumplen en la práctica. Por otra parte, abundan otros métodos más flexibles que construyen y explotan relaciones de preferencia borrosas, pero que no ofrecen prescripciones consistentes en presencia de alternativas irrelevantes o de grafos complicados. En el trabajo se presenta un nuevo método basado en optimización multiobjetivo para mejorar la calidad del ordenamiento final que se deriva de la explotación de la relación de preferencia borrosa, método que parece recomendable para construir agentes de decisión. Se introduce un nuevo concepto de "alternativa irrelevante". La propuesta ofrece prescripciones más consistentes y menos dependientes de alternativas irrelevantes que otros enfoques, y aparece como un intento de conciliación de las dos principales tendencias de modelación matemática de la decisión, que hasta ahora han sido consideradas en oposición.

Palabras clave: agente de decisión, ordenamiento, relación de preferencia borrosa, optimización multiobjetivo, sobreclasificación, alternativas irrelevantes

1 Introducción

La toma de decisiones es una de las actividades más consustanciales a nuestro concepto de inteligencia humana ; imitar y mejorar la capacidad de ponderación, integración y raciocinio que se atribuye al decisor humano es uno de los mayores retos que enfrentan la Inteligencia Artificial y el desarrollo de sistemas de apoyo a la toma de decisiones.

En su forma más general, un problema de decisión es decir SI o NO a determinado curso de acción. En forma más concreta, casi todos los problemas que se abordan son de clasificación (diagnóstico como un caso particular), de selección de la mejor acción (o de un grupo de buenas acciones) de acuerdo con las metas, y de ordenamiento de un conjunto de acciones según el nivel de satisfacción del decisor. La complejidad de la respuesta – que debe ser manejada por el software "inteligente" – se debe principalmente a la existencia de datos imprecisos, al desconocimiento sobre los estados futuros de la naturaleza, y a la contradicción entre diversos atributos en conflicto. En todos los casos la subjetividad juega un importante rol, que durante mucho tiempo fue ignorado por la Inteligencia Artificial (cf.(Pomerol, 1995)), quizás debido a la importancia que en ella han tenido los sistemas para el diagnóstico, que es probablemente la actividad más "objetiva" dentro de los procesos de toma de decisiones. La modelación de las preferencias sobre atributos en conflicto y de la actitud ante el riesgo es esencial para que un agente de decisión realice una labor acorde con la singularidad del cliente en los problemas que implican selección u ordenamiento. Incluso en los problemas de clasificación, particularmente en categorías evaluativas, la modelación de las preferencias multicriterio es central. No existe una forma apriorística, "objetiva", de valorar el conflicto de atributos, el riesgo y la imprecisión.

En la concepción del agente racional para la toma de decisiones se ha privilegiado a la escuela normativa de la decisión, que tiene en Estados Unidos de Norteamérica su asiento principal. Para modelar la creencia sobre sucesos probables se utiliza la estadística bayesiana; la actitud ante el riesgo se refleja en una función de utilidad, y las preferencias distribuidas entre múltiples criterios se modelan por una función de valor multiatributo (por ejemplo (Russell y Norvig, 1996)).

Conceptualmente poderosos, estos enfoques están sin embargo limitados por exigir mucho de la consistencia y racionalidad del decisor humano, y de su disposición intelectual y de tiempo para un proceso que a muchos se les antoja arduo. Es que el paradigma de la escuela normativa de la decisión, si bien se comporta magníficamente en condiciones ideales (presencia de un analista de la decisión, disposición del decisor humano para dedicar tiempo y esfuerzo a reflexionar sobre sus creencias y preferencias, esclarecerlas y aumentar su consistencia), es casi imposible de aplicar cuando un sistema de apoyo a la decisión o un agente inteligente para la decisión intentan modelar la subjetividad humana. Son preferibles formas simples de modelación, aunque imprecisas, si es que se puede controlar y manejar la imprecisión que se introduce.

Sea A un conjunto de acciones potenciales (no necesariamente excluyentes). Siguiendo a Roy (Roy y Vanderpooten, 1995),consideremos tres tipos diferentes de problemas de decisión que pueden ser abordados por agentes software o por sistemas más complejos de ayuda a la decisión:

P_α : Seleccionar el mejor elemento de A

P_β : Clasificar los elementos de A en categorías predeterminadas

P_γ : Realizar un ordenamiento completo de A (definir un orden débil en AxA) de acuerdo con la calidad de las acciones.

P_β se resuelve con técnicas de Inteligencia Artificial. P_α puede ser visto como un caso especial de P_γ. Para resolver P_α y P_γ se requiere definir relaciones binarias de preferencia estricta e indiferencia, que cumplan axiomas de completitud y transitividad, como lo exige el enfoque normativo de la decisión (por ejemplo, (French, 1986)). Sin embargo, la modelación imprecisa que un agente software puede realizar de las preferencias y creencias de un decisor humano va necesariamente a conducir a relaciones de preferencia de carácter "borroso".

Los predicados del tipo "El decisor humano considera que la acción a es al menos tan buena como la acción a" deben ser considerados desde el punto de vista de la Lógica Borrosa, asociándoles un grado de credibilidad. El carácter borroso de las relaciones de preferencia puede provenir de fuentes muy diversas:

- la contradicción entre atributos en conflicto
- la contradicción entre opiniones diversas (decisión en grupo colaborativo)
- conocimiento de las consecuencias sólo a un nivel probabilista
- otro tipo de imprecisión en la información.

La teoría clásica de la decisión descansa sobre el axioma de la comparabilidad total. Las relaciones de preferencia estricta e indiferencia tienen la propiedad de transitividad, y todas las parejas de alternativas son comparables bajo una de esas dos relaciones binarias (Roy, 1996),(French, 1986). Este modelo impone condiciones ideales al comportamiento del decisor que no se cumplen generalmente en la práctica, pero una vez construido y analizada su consistencia, permite fácilmente llegar a una prescripción final (explotación del modelo de preferencias), cuya racionalidad no se puede objetar.

Por otra parte, la escuela europea de ayuda a la decisión ha desarrollado numerosos enfoques para construir y explotar relaciones de preferencia borrosas (por ejemplo, Fodor y Rubens, 1994), (Roy, 1990), (Brans y Vincke, 1985)). El modelo de preferencias borrosas es más fácil de construir, necesita menos información e impone requisitos mucho más suaves al actor del proceso de decisión, pero su prescripción es más cuestionable. Nosotros pensamos que en la explotación de la relación de preferencia borrosa está su debilidad fundamental como opción a la teoría normativa. El principal defecto de los métodos para explotarlas es que la posición de las acciones a y b en el ordenamiento final no está determinada por el grado de credibilidad σ de la preferencia que las relaciona; otras alternativas influyen fuertemente sobre la posición relativa de a y b. De aquí se derivan dos consecuencias negativas:

- el ordenamiento final muchas veces no respeta las preferencias del DM recogidas en $\sigma(a,b)$ y $\sigma(b,a)$, y
- la posición de a y b puede cambiar si otras alternativas son consideradas o no dentro del conjunto sobre el cual se realiza la explotación de σ.

Estos defectos conducen a ciertas situaciones irracionales: primero, a violaciones de la información preferencial que se puede derivar de σ (por ejemplo, $\sigma(a,b) >> \sigma(b,a)$ y sin embargo la acción b queda antes que a en el orden final); las violaciones de esta naturaleza deberían minimizarse . Segundo, a dependencia respecto a las alternativas irrelevantes en el sentido del clásico axioma de Arrow (Arrow y Reynaud, 1986).

En realidad, la sombra del Principio de Independencia respecto a las Alternativas Irrelevantes, (de modo simplificado, el hecho considerado por muchos contradictorio de que la posición relativa de a y b en el ordenamiento final puede depender de que otra acción c pertenezca o no al conjunto de decisión), se extiende sobre todos los métodos que explotan relaciones de preferencia borrosas (por ejemplo, ver (Fodor y Rubens, 1994), (Perny y Roy, 1992)). El modo de explotación de la relación binaria borrosa debe ser tan robusto como sea posible al papel de las "alternativas irrelevantes", en el sentido del axioma de Arrow. En nuestra opinión, esta propiedad, junto a la de minimizar las contradicciones entre el ordenamiento propuesto y σ, deben ser de las más deseables características de una prescripción basada en relaciones de esta naturaleza.

En este trabajo nosotros presentamos una propuesta basada en la solución de un problema de optimización combinatorial y multiobjetivo, que posee magníficas propiedades en el sentido de la discusión precedente. Esta contribución está organizada del siguiente modo: en la sección 2 se precisa la notación a emplear; en el punto 3 presentamos una crítica a los métodos existentes; nuestra propuesta aparece en la sección 4 seguida de algunos análisis complementarios en la quinta. La sección 6 recoge algunos ejemplos que prueban la efectividad de nuestro enfoque. Por último, se discuten breves conclusiones.

2 Notación Básica

Sea A un conjunto finito de alternativas objeto del proceso de decisión en un problema específico. Sea σ (x,y) una relación de preferencia borrosa definida sobre AxA, con imagen en [0,1]. σ (x,y) modela el grado de credibilidad del predicado " la alternativa x es al menos tan buena como y".

Sea λ un nivel de corte tal que si $\sigma(x,y) \geq \lambda$, diremos que $xS^{\lambda}y$ (x sobreclasifica a y con credibilidad λ). En otro caso, decimos que x no sobreclasifica a y con credibilidad λ, y lo denotamos $xnS^{\lambda}y$.

Postulamos la existencia de un nivel de umbral β tal que si $xS^{\lambda}y$ y además $\sigma(y,x) \leq \lambda-\beta$, entonces existe una relación de preferencia asimétrica a favor de x, y que denotaremos por $xP^{\lambda\beta}y$. Parece evidente que para valores relativamente altos de λ y β, las condiciones que definen $P^{\lambda\beta}$ constituyen argumentos de peso para justificar cierta preferencia a favor de x en el sentido de la propuesta de (Roy, 1996).

Sea E una forma de explotar σ y sea $\hat{R}$ el ordenamiento del conjunto que se deriva de aplicar E a σ; E es una función que a cada σ le hace corresponder un orden completo de A. $\hat{R}$ define un orden débil R sobre A. Para todo (a,b) de AxA, $a\hat{R}b$ si y sólo si la alternativa a no está debajo de b en $\hat{R}$. Por último, llamemos O a la parte asimétrica de R; es decir:

$(a,b) \in AxA,\ aOb \Leftrightarrow aRb$ y $bnRa$

3 Una Crítica y Una Posición

Es obvio que $aP^{\lambda\beta}b$ con altos valores de λ y β se contradice con bRa, violando la expresión directa de las preferencias del decisor recogidas en $\sigma(a,b)$ y $\sigma(b,a)$. Esto puede suceder en el contexto de los métodos de explotación existentes debido a la influencia que otras alternativas presentes en el conjunto A tienen en la determinación de la posición relativa de a y b. Nosotros pensamos que, en ausencia de relaciones de preferencia transitivas y completas, la comparación con otras alternativas puede ser importante para decidir entre a y b, y es entonces admisible que $c \neq a$, $c \neq b$ pueda jugar un papel en la comparación. Sin embargo, esta influencia provoca dependencia respecto de las "alternativas irrelevantes"; hay muchas alternativas fuera del conjunto A que son potencialmente factibles, opciones que pudieran ser reales en otra situación de decisión, y que cambiarían la posición relativa de a y b en el orden final. Semejante dependencia admite una crítica severa desde una perspectiva racional. Consideremos el siguiente ejemplo: Un decisor (o un agente inteligente en su lugar) está valorando a cuál de tres cines cercanos asistir.

Las películas candidatas son Mente Brillante, Señor de los Anillos y Amor Ciego. El decisor (o el agente) aplica un método de selección multicriterio que le sugiere aceptar Mente Brillante como la mejor alternativa. Cuando el decisor llega al cine en cuestión se entera de que en otra sala cercana proyectan Pearl Harbor. Ante esta nueva circunstancia, el decisor aplica de nuevo el método de selección multicriterio incluyendo Pearl Harbor en el conjunto, y obtiene ahora que la mejor opción es ¡Señor de los Anillos!. Pero al arribar a la correspondiente sala cinematográfica, un conocido le dice que en realidad la función de Amor Ciego había sido sustituida por un festival de teatro. A pesar de que el amigo argumenta que la ausencia de Amor Ciego no tiene por qué cambiar la preferencia favorable a Señor de los Anillos sobre las demás, el decisor admite que había estado trabajando sobre un conjunto de decisión equivocado, ya que si hubiera sabido de la existencia del festival de teatro no hubiera considerado Amor Ciego entre las alternativas posibles. Utiliza de nuevo el método de selección considerando solamente Señor de los Anillos, Mente Brillante y Pearl Harbor, y obtiene ahora Mente Brillante. El decisor escoge regresar a su casa ante la imposibilidad de obtener una propuesta consistente del método de selección.

Para alejar el fantasma de la irracionalidad, algunos alegan que un problema de decisión se formula sobre un conjunto de alternativas; si el conjunto cambia es otro problema de decisión, con otra solución. Este argumento es de carácter puramente formal; elude la semántica de la decisión, olvidando que las acciones a y b son las mismas, y que prescripciones aOb y bOa no pueden ser ambas ciertas.

Analicemos más profundamente el ejemplo del cinéfilo para arribar a una posición. El único elemento racional que vemos en el primer cambio de prescripción a favor de Señor de los Anillos es que al considerar Pearl Harbor se introdujo en el análisis nueva información relevante para el orden relativo de las películas. Esa información es legítima, y por eso en realidad Pearl Harbor (o la información que porta) es relevante para ordenar Mente Brillante y Señor de los Anillos. Por lo tanto, un proceso más efectivo de modelación y representación de las preferencias del decisor debía haber tomado en cuenta a Pearl Harbor, aun cuando no formara parte de la programación ese día concreto. Del mismo modo, el segundo cambio de prescripción esta vez a favor de Mente Brillante indica que Amor Ciego porta información relevante para el ordenamiento final, y por tanto es un error del decisor excluirla del conjunto.

Para hacer un ordenamiento correcto del conjunto de películas, el decisor debe añadir a las que realmente puede ver ese día otras que enriquezcan la información incluida en el modelo global de preferencias $\sigma(x,y)$, las que porten información relevante para decidir entre las alternativas que son verdaderamente factibles. Solo se dispone de información parcial si el análisis se limita al conjunto original. Entre otras funciones, el agente inteligente debe encontrar y manejar la información importante para la decisión. Luego, si se están seleccionando las mejores alternativas de un conjunto, el agente debe vigilar el efecto de las alternativas exteriores que puedan cambiar la prescripción. El agente debe ser capaz de detectar las acciones potenciales externas al conjunto de decisión que sean relevantes para la prescripción e incluirlas en el conjunto; denotaremos por A_{amp} el nuevo conjunto. De esa forma la prescripción deviene independiente de la inclusión de nuevas alternativas, y se logra la independencia que postula Arrow respecto a las alternativas fuera del conjunto; pero el principio de independencia ha adquirido un nuevo contenido: el ordenamiento de A que se deriva del ordenamiento de A_{amp} debe ser independiente de la inclusión de cualquier otra acción potencial en A_{amp}, y su significado es que se ha obtenido la información necesaria para lograr en la prescripción estabilidad ante nueva información.

Por supuesto, se requiere un método de explotación que reduzca la dependencia respecto a las acciones externas al conjunto original y que además permita fácilmente detectar cuáles son las acciones externas que aportan información relevante para el ordenamiento. Nuestra propuesta es un intento serio en esa dirección.

4 Nuestra Propuesta

4.1 El Mejor Ordenamiento

En nuestra opinión, la calidad del orden final debe ser evaluada de acuerdo al número de discrepancias y concordancias de R con σ, S^{λ} y $P^{\lambda\beta}$.

Se define el conjunto de serias discrepancias (violaciones), en la siguiente forma:

$V = \{(x,y) \in AxA$ tales que $xP^{\lambda\beta}y$, $yRx\}$

y $n_v = card(V)$

Sea $D = \{(x,y) \in AxA$ tales que xOy, $xnS^{\lambda}y\}$. D tiene intersección no vacía con V, pero también contiene otras discrepancias menos severas; $n_d = card(D)$.

Por su parte, el conjunto de concordancias C se define como:

$C = \{(x,y) \in AxA$ tales que $xS^{\lambda}y$, $xRy\}$; $n_c = card(C)$

Note de las definiciones previas que n_v es función de R, λ y β; n_d y n_c dependen de R y λ..

Nuestra propuesta es hacer coincidir al elemento imagen de la función E con la mejor solución de compromiso del problema de optimización multiobjetivo

Minimizar (n_v, n_d), Maximizar (n_c, λ) .... (1)

R, λ con $R \subset AxA$ y $\lambda \geq \lambda_0$

(λ_0 es un nivel de credibilidad mínimo, usualmente mayor o igual a 0.5)

Minimizar n_v, y n_d intenta reducir la magnitud de los argumentos contra R; aumentar n_c aporta nuevas razones a favor de R; incrementar el valor de λ mejora la credibilidad de las relaciones $P^{\lambda\beta}$ y S^{λ} que son el fundamento del orden final.

El objetivo más importante (aunque no necesariamente en sentido lexicográfico) es minimizar el cardinal de V; n_d es más importante que n_c. Valores de $\lambda \in [0.65; 0.75]$ son suficientemente altos y normalmente no se necesitan incrementos adicionales.

El problema (1) es de optimización combinatoria y multiobjetivo, en el que las variables son ordenamientos y números reales; su dificultad crece exponencialmente con el cardinal de A, y su estructura sugiere intensamente el empleo de algoritmos evolutivos, técnicas que han demostrado ser particularmente deseables para problemas difíciles de optimización multiobjetivo debido principalmente a que son mucho menos sensibles que las técnicas tradicionales a las propiedades matemáticas de las funciones objetivo y restricciones, así como al tamaño del problema (Coello, 1999), (Michalewicz, 1996).

No presentaremos aquí herramientas para hallar el mejor compromiso de (1), lo que sería objetivo de otro trabajo. En (Leyva y Fernández, 1999) se modeló el problema de encontrar el mejor ordenamiento en un modo relativamente similar, pero más simple y utilizando menos información sobre σ. Se obtuvieron excelentes resultados con un procedimiento genético resolviendo el siguiente problema:

Min u, f, Max λ .... (2)

$R_s, \lambda \quad \lambda \geq \lambda_0$

donde u es la "función de inadaptabilidad" que coincide con n_v y a la que se la asigna en (Leyva y Fernández, 1999) prioridad lexicográfica; f es la medida de "adaptabilidad" que contabiliza la cantidad de pares de alternativas entre las que media una relacion de incomparabilidad ($a_i nS^{\lambda} a_j$ y $a_j nS^{\lambda} a_i$) ; R_s denota orden estricto total de A. La idea del algoritmo genético utilizado para resolver (2) puede emplearse sin grandes modificaciones en (1). Las soluciones de (1) prometen ser de mayor calidad porque en su planteo recoge más información sobre la relación de preferencia borrosa.

4.2 Algunas Propiedades de Soluciones

Algunas soluciones del problema (1) tienen propiedades interesantes . Son las siguientes:

Propiedad 1

Con la notación anterior, sea $P^{\lambda\beta}$ definida sobre $B \subset AxA$.

Supongamos que existe R tal que $n_v = 0$, entonces $P^{\lambda\beta}$ no tiene ciclos.

Demostración:

Si $n_v=0$ y $xP^{\lambda\beta}y$, entonces $ynRx$, o lo que es equivalente, xOy xOy significa que x está situado estrictamente antes que y en R_A. Obviamente O es un orden parcial estricto.

Supongamos que hay al menos un ciclo de $P^{\lambda\beta}$. Entonces podemos encontrar x1, x2,...xk tales que

$x1\,P^{\lambda\beta}x2,\ x2\,P^{\lambda\beta}x3, \ldots.\ xk\,P^{\lambda\beta}x1$

de donde sigue que

x1Ox2, x2Ox3,..... xkOx1

Por transitividad de un orden parcial estricto tendríamos que x1Ox1, lo que es una contradicción. Por consiguiente, $P^{\lambda\beta}$ no puede tener ciclos.

El recíproco de esta proposición también es cierto. Si $P^{\lambda\beta}$ genera un grafo acíclico, entonces existe R tal que $n_v = 0$.

De la demostración de estas propiedades surge una idea de interés: la existencia de ciclos de $P^{\lambda\beta}$ implica violaciones inevitables; al mismo tiempo, una violación inevitable ($n_{vmin} \neq 0$) indica que hay al menos un ciclo de la relación de preferencia estricta. Consecuentemente, el grafo de $P^{\lambda\beta}$ tiene asociado una cantidad n_{vmin} de violaciones inevitables, que es naturalmente función de λ y β.

Propiedad 2

Supongamos que a $P^{\lambda'\beta}$b y que las acciones a y b no pertenecen al mismo ciclo de $P^{\lambda'\beta}$. Entonces, en cualquier solución de (1) con $n_v = n_{vmin}(\lambda')$, se cumple que aOb.

Demostración:

En general pueden existir k≥0 ciclos de $P^{\lambda'\beta}$ que producen n_{vmin} violaciones inevitables.

Sea C_a el conjunto de alternativas que forman ciclos a los que pertenece a.

C_b el conjunto de alternativas que forman ciclos a los que pertenece b

C_φ el conjunto de alternativas que están en ciclos que no contienen ni a a ni a b.

Llamemos n_a, n_b y n_φ al número mínimo de violaciones que se asocia a los conjuntos C_a, C_b, C_φ respectivamente (como quiera que se ordene C_* habrá al menos n_* violaciones).

Observe que $n_a + n_b + n_\varphi = n_{vmin}(\lambda')$

Supongamos que bRa. Esa es una violación que no corresponde a ninguno de los tres conjuntos C_*, pues a y b no pertenecen juntas a ninguno de ellos. Entonces para un ordenamiento R_A tal que bRa, tenemos $n_v(R,\lambda') \geq n_a + n_b + n_\varphi + 1$.

En consecuencia, $n_v(R,\lambda') > n_{vmin}(\lambda')$

Bajo las condiciones de este teorema diremos que aOb está determinado por $P^{\lambda'\beta}$.

Propiedad 3

Sea $(n_v, n_d, n_c, \lambda_{max})$ con R_A una solución optimal del problema (1) en la que $n_v = n_{vmin}(\lambda_{max})$. Supongamos que en esa solución aOb está determinado por $P^{\lambda\beta}$. Supongamos también que $A' = A \cup \{c\}$ y que c no genera ciclos de $P^{\lambda\beta}$ ($\lambda=\lambda_{max}$) que contengan juntas a a y b. Denotamos por (1') al problema (1) resuelto con $R' \subset A'XA'$, y $(n'_v, n'_d, n'_c, \lambda_{max})$ con R'_A una solución optimal en la que $n'_v = n'_{vmin}(\lambda_{max})$. Entonces aO'b en R'_A, donde O' es la parte asimétrica de R'.

La demostración es trivial. Consideremos el conjunto A' con una cantidad n'_{vmin} de violaciones inevitables de $P^{\lambda\beta}$ para $\lambda=\lambda_{max}$. Puesto que c no es capaz de generar ciclos que contengan juntas a a y b, entonces están dadas las condiciones del teorema anterior y aO'b.

Esta propiedad da cierta consistencia respecto a "alternativas irrelevantes". Si aOb está determinado por $P^{\lambda\beta}$ ninguna c exterior al conjunto que no forme ciclos conteniendo al par (a,b) puede alterar la posición relativa de estas dos acciones en el ordenamiento final. Si no existe c capaz de formar ciclos que incluyan (a, b) para un nivel dado de λ, entonces no puede alterarse aOb .

Propiedad 4

Sea $(n_v, n_d, n_c, \lambda_{max})$ con R_A una solución optimal del problema (1) en la que $n_v = n_{vmin}(\lambda_{max})$. Supongamos que en esa solución aOb está determinado por $P^{\lambda\beta}$. Sea c≠a,b y consideremos $A'' = A\setminus\{c\}$.

Denotamos por (1") al problema (1) resuelto con $R'' \subset A''XA''$, y $(n''_v, n''_d, n''_c, \lambda_{max})$ con R''_A una solución optimal en la que $n''_v = n''_{vmin}(\lambda_{max})$. Entonces aO"b en R''_A, donde O" es la parte asimétrica de R".

La demostración se infiere inmediatamente de la propiedad 2, cuyas premisas se siguen cumpliendo cuando cualquier c diferente de a y b es extraída del conjunto de alternativas. Por supuesto, la propiedad puede ser aplicada reiteradamente. De aquí se infiere que si aOb está determinado por $P^{\lambda\beta}$, la posición relativa de las dos acciones no cambiará si se extrae cualquier subconjunto de alternativas (que no contenga a y b) del conjunto original.

Propiedad 5

Supongamos que en una solución optimal de (1) $(n_v, n_d, n_c, \lambda_{max})$ con R_A se tiene que aOb, y no existe $c \neq a,b$ tal que aRc y cRb. Entonces, con $\lambda = \lambda_{max}$, se tiene que $aS^\lambda b$ y $bnS^\lambda a$.

Demostración:

Si $anS^\lambda b$, una solución en la que bRa y aRb (a y b en la misma posición del ranking) aumentaría n_d, sin reducir ningún otro objetivo. Por tanto, la solución original no sería optima de Pareto. Entonces $aS^\lambda b$

Si $bS^\lambda a$ una solución en que aRb y bRa incrementaría n_c sin cambios en los otros atributos ; la solución original no sería óptima de Pareto. Consecuentemente $bnS^\lambda a$

Esta propiedad significa que si en la solución de (1) la acción a está inmediatamente encima de b en el ordenamiento del conjunto, existe necesariamente una preferencia presumible a favor de a. O sea, la posición de dos alternativas a y b situadas una después de otra en el ordenamiento corresponde con la información de $\sigma(a,b)$ y $\sigma(b,a)$. Y para un valor suficientemente pequeño del umbral β, esa presumible preferencia se convierte en $P^{\lambda\beta}$, con las posibilidades de influir en el ordenamiento discutidas en las propiedades 1-4.

Principio de Correspondencia

Un modelo particular debe estar incluido como condición límite de uno más general. En la teoría de la decisión clásica la relación de preferencia débil ("a es al menos tan buena como b") puede ser solo verdadera o falsa. Al igual que la lógica bivalente usual es un caso particular de la Lógica Borrosa, la relación de preferencia débil de la escuela normativa podría ser considerada como un caso particular de las relaciones binarias borrosas. Si λ se acerca a 1 y β se hace pequeño, y si además S^λ fuera transitiva y completa en A, decidir utilizando relaciones borrosa debería conducir al mismo resultado normativo.

Si S^λ es transitiva y completa, existe una función de valor u que refleja las preferencias del mismo modo que S^λ. De acuerdo al valor de u se forma el ranking que denotaremos por R_{uA}.

Propiedad 6

Supongamos S^λ es un orden débil sobre A y u es la función de valor ordinal que expresa las mismas preferencias. Entonces, existe un ranking R_A en que $n_v = n_d = 0$ cualquiera sea β. Aún más, existe $\beta>0$ tal que la solución R_A de (1) en el punto $(0,0, n_{cmax}, \lambda)$ coincide con el ordenamiento R_{uA} derivado de u.

Demostración:

Denotemos por R_u la relación de orden débil que se deriva de $R_{u,A}$. Es obvio que

$aR_u b \Leftrightarrow aS^\lambda b$. Por consiguiente, siempre es falsa la conjunción de $aR_u b$ y $anS^\lambda b$. Entonces tomando $R=R_u$ tenemos $n_v = n_d = 0$ independientemente del valor de β. Esto prueba la primera parte.

Supongamos que la segunda parte de la tesis es falsa. Entonces existe algún par (a,b) tal que la disyunción de las proposiciones

i. aRb y $anR_u b$

ii. $aR_u b$ y anRb

es verdadera.

Si i. es verdadera entonces $anS^\lambda b$; pero por hipótesis S es completa, luego $bS^\lambda a$.

Si aOb, $n_d \neq 0$ puesto que $anS^\lambda b$. En caso de que aRb y bRa, siempre podemos encontrar β suficientemente pequeño tal que $anS^\lambda b \Rightarrow \sigma(a,b) < (\lambda-\beta)$. Pero entonces $bP^{\lambda\beta}a$ y $n_v \neq 0$. Surge una contradicción con la hipótesis.

En caso de que ii. sea verdadera, tenemos $aS^\lambda b$ y bOa. Pero si R fuera igual a R_u, puesto que $aR_u b$, n_c aumenta respecto a la solución previa, sin detrimento de los restantes objetivos. Esto contradice la hipótesis de que R corresponde con una solución optimal de Pareto de (1). Luego R debe coincidir con R_u. La demostración ha finalizado.

El principio de correspondencia es una expresión de la transformación de una verdad relativa en otra, y su cumplimiento debería ser un atributo obligatorio de cualquier método de explotación. La propiedad 6 indica que el método que proponemos es consistente con el principio de correspondencia. Pero hay en ella otros argumentos que apoyan nuestro enfoque: es que el intento de maximizar λ tiende a eliminar intransitividades de S^λ, y el de maximizar n_c a reducir la cantidad de parejas de alternativas incomparables con S^λ ; por tanto, acercarse a la solución ideal del problema (1) implica acercar R_A a R_{uA}.

Las soluciones del problema (1) poseen otras propiedades de interés. No estamos interesados en realizar aquí otras demostraciones formales, pero no es difícil comprobar que nuestra propuesta satisface criterios de universalidad, neutralidad, continuidad, monotonía no estricta, exactitud y preservación de datos, propuestos en (Boyssou y Vincke, 1995). El método propuesto no tiene características estructurales que se asocien con un tipo especial de relación de preferencia borrosa. La única condición que necesitamos es que $\sigma(x,y)$ tenga realmente para quien toma las decisiones el significado de valor veritativo del predicado "la alternativa x es al menos tan buena como y", de modo que sea posible darle significado a $P^{\lambda\beta}$ como una cierta relación de preferencia asimétrica, que indique una sustentable superioridad de x sobre y. Nuestro método no asume ninguna otra propiedad de σ, por lo que funciona en un rango muy amplio de situaciones. Las complejas consideraciones de propiedades estructurales que se abordan en (Boyssou y Vincke, 1995) no son relevantes para nuestra propuesta.

Note además que las propiedades 3 ,4 y 5 establecen la confiabilidad de la información aOb derivada de la solución de (1). Si aOb está determinado por $P^{\lambda\beta}$, las propiedades 3 y 4 aseguran que ese resultado no depende de alternativas irrelevantes (salvo cuando la alternativa irrelevante c puede crear un ciclo con a y b). Analicemos esto con más detalle a continuación:

Supongamos que aOb está determinado por $P^{\lambda\beta}$. Entonces $\sigma(a,b)=\alpha \quad \sigma(b,a)=\gamma$ with $\alpha\geq\lambda\geq(\gamma+\beta)$ .... (3)

En nuestra opinión, la alternativa $c \notin A$ establece una seria duda sobre aOb (con el nivel de credibilidad λ) si y sólo si $bP^{\lambda\beta}c$ y $cP^{\lambda\beta}a$. Consecuentemente, debe satisfacerse $\sigma(b,c)\geq\lambda \quad \sigma(c,b)\leq(\lambda-\beta) \quad \sigma(c,a)\geq\lambda \quad \sigma(a,c)\leq(\lambda-\beta)$ .. (4)

(4) establece un criterio para juzgar si existen fuera de A alternativas que pudieran modificar el resultado aOb de ser incluidas en el conjunto objeto de decisión, siendo por tanto relevantes para decidir sobre la confiabilidad de la información que se deriva del ordenamiento. Las condiciones (4) son necesarias para que la presencia de c pueda hacer dudar sobre aOb con nivel de credibilidad λ. Otros métodos de explotación no ofrecen modos de realizar este análisis; de hecho, ni siquiera admiten la importancia que pueden tener acciones potencialmente factibles para cuestionar la validez del ordenamiento final.

Intuitivamente parece claro que mientras mayores sean los valores de λ y β más difícil es el cumplimiento de (4); consecuentemente, la maximización de λ en (1) debe conducir a resultados más consistentes respecto a la inclusión de nuevas alternativas en el conjunto de decisión. Alguna luz puede arrojar el análisis de definiciones particulares de σ.

4 Análisis de Consistencia en Algunos Casos Particulares

Trabajaremos aquí con una relación binaria borrosa definida de la siguiente forma: consideremos alternativas evaluadas mediante N criterios $\underline{a}=(a_1, \ldots a_N)$, $\underline{b}=(b_1, \ldots b_N)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que a_i y b_i son números reales que reflejan es estado del iésimo atributo. Supongamos además que $a_i \geq b_i$ significa que "a es al menos tan buena como b desde el punto de vista del iésimo criterio" y asumimos la transitividad de esa relación.

Definamos

$$J_{\geq}(\underline{a},\underline{b}) = \{j \text{ tales que } a_j \geq b_j\}$$

y $\sigma(\underline{a},\underline{b}) = \text{card}(J_{\geq}(\underline{a},\underline{b}))/N$ ....(5)

Supongamos que $\sigma(x,y)$ viene dada por (5) y que se cumplen las condiciones (3). La intención del análisis que sigue es determinar algunas condiciones necesarias sencillas que debe cumplir c no perteneciente a A para poder cuestionar aOb de ser incluida en él.

Sabemos, de acuerdo con (4), que tal c debe al menos cumplir $\sigma(b,c)\geq\lambda$ y $\sigma(c,a)\geq\lambda$.

Denotemos $J\cap = J_{\geq}(a,b) \cap J_{\geq}(b,c)$. Observe que si un criterio con índice j pertenece a $J\cap$, entonces $j \in J_{\geq}(a,c)$ puesto que la relación unidimensional $\geq$ es transitiva. Entonces $\text{card}(J_{\geq}(a,c)) \geq \text{card}(J\cap)$ ... (6)

Es obvio que $\text{card}(J_{\geq}(a,b)) = N\alpha \geq N\lambda$ ....(7)

y $\text{card}(J_{\geq}(b,c)) \geq N\lambda$ .... (8)

En lo que sigue el superíndice c denotará complemento. De (7) y (8) tenemos

$\text{card}(J_{\geq}^{c}(a,b)) \leq (N-N\lambda)$ y $\text{card}(J_{\geq}^{c}(b,c)) \leq (N-N\lambda)$... (9)

Ahora consideremos $J\cap^c$; $j \in J\cap^c$ si y sólo si al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

i. $j \notin J_{\geq}(a,b)$

ii. $j \notin J_{\geq}(b,c)$

Entonces $\text{card}(J\cap^c) \leq \text{card}(J_{\geq}^{c}(a,b)) + \text{card}(J_{\geq}^{c}(b,c))$ ...(10)

De (9) y (10) se tiene que

$\text{card}(J\cap^c) \leq 2N(1-\lambda)$ ....(11)

Por tanto, $\text{card}(J\cap) \geq (N-2N(1-\lambda)) = N(2\lambda-1)$ .... .. (12)

De acuerdo con (5) $\sigma(a,c) = J_{\geq}(a,c)/N$. Utilizando (6), (12) y (5) obtenemos

$\sigma(a,c) \geq 2\lambda-1$ .... (13)

pero de (4) c produce un ciclo solo si $\sigma(a,c)\leq\lambda-\beta$. Combinando esta última expresión con (13) concluimos que λ y β deben cumplir $\lambda+\beta\leq 1$ .... (14)

La satisfacción de (14) es necesaria para que exista c capaz de poner en duda aOb en el sentido de este trabajo (con σ definida por (5)).

Es posible derivar un resultado interesante para un caso particular. Supongamos que σ se define de tal manera que

$(x,y) \in AxA \quad \sigma(x,y)+\sigma(y,x)=1$ ....(15)

Este es el caso en que solamente se permiten perfiles estrictos en cada criterio; sólo cabe una relación de preferencia estricta al comparar a_i y b_i. No es menester cambiar la definición de σ dada por (5), pero entender que no se permiten indiferencias al comparar unidimensionalmente a y b. J se cambia por $J_{\geq}$. Podemos repetir la demostración anterior hasta llegar a la expresión (13), y tomando en cuenta que $\sigma(c,a)\geq\lambda$ según (4), y combinando esta condición con (13) y (15), obtenemos

$\lambda+2\lambda-1 \leq \sigma(c,a)+\sigma(a,c)=1$

$\lambda \leq 2/3$ ....(16)

Entonces, si $\lambda > 2/3$ no existe c fuera del conjunto capaz de cuestionar aOb determinado por $P^{\lambda\beta}$. 2/3 aparece como un claro nivel de consenso para decisiones en grupo que sólo consideren perfiles estrictos.

5 Algunos Ejemplos Ilustrativos

Ejemplo1:

Consideremos la relación de preferencia borrosa que se muestra en la tabla 1

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_0	-	0.73	0.65	0.65	0.65
A_1	0.50	-	0.70	0.67	0.66
A_2	0.50	0.50	-	0.63	0.63
A_3	0.50	0.35	0.35	-	0.70
A_4	0.53	0.30	0.30	0.70	-

Tabla 1: Matriz de credibilidad entre las acciones A0, ..., A4

Hay dos argumentos fuertes para considerar A_0 como la mejor alternativa:

En primer término, analicemos el subconjunto A^{UND} (unfuzzy nondominated alternatives (cf. (Orlovski, 1979), (Fodor and Rubens, 1994)) definido de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^{UND} = \{ a_i \in A : \sigma(a_i, a_j) \geq \sigma(a_j, a_i) \ \forall\ a_j \in A \}$$

En el ejemplo $\mathbf{A}^{UND}$ no es vacío; $A_0 \in A^{UND}$ pero las restantes alternativas no están incluidas en él. Más aún $\sigma(A_0, A_j) \geq \sigma(A_j, A_0) + 0.12\ A_j$

El segundo argumento es el siguiente: si consideramos el conjunto reducido $\mathbf{A'} = \mathbf{A} - \{A_0\}$, tenemos que $\mathbf{A'}^{UND} = \{A_1\}$, claramente la mejor alternativa en **A'**. Pero observe que en la comparación entre A_0 y A_1, si tomamos λ=0.7 y β=0.15 como niveles de consenso y umbral, podemos aceptar razonablemente que"A_0 sobreclasifica a A_1 pero A_1 no sobreclasifica a A_0 ", lo que implica cierta preferencia por A_0.

Nosotros aplicamos el algoritmo genético propuesto por (Leyva y Fernandez, 1999) para resolver el problema (2), considerando β=0.15, "función de adaptabilidad" $f = w\,n_d - n_c$ (w>1 es un factor de ponderación) y priorizando f sobre λ. El número de veces que cada acción fue puesta en determinada posición del ordenamiento se muestra en la tabla 2. Esa información sugiere fuertemente el ordenamiento $A_0 > A_1 > A_2 > (A_3, A_4)$ con n_v=0, n_d=0, n_c=11 y $\lambda \approx 0.63$.

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	**100**	0	0	0	0
2	0	**100**	0	0	0
3	0	0	**100**	0	0
4	0	0	0	**54**	**48**
5	0	0	0	**46**	**52**

Tabla 2: Resultados de la búsqueda genética

Si utilizamos la medida del "flujo neto de sobreclasificación" para ordenar (Fodor y Rubens, 1994), los resultados se dan en la tabla 3:

Acción	Flujo neto
A_0	+0.65
A_1	+0.65
A_2	+0.26
A_3	-0.75
A_4	-0.81

Tabla 3: Flujo neto de sobreclasificación

Estos valores sugieren el orden $(A_0, A_1) > A_2 > (A_3, A_4)$, que no concuerda con los argumentos dados a favor de A_0

Para otra comparación, la tabla 1 fue procesada con el método de explotación de ELECTRE-III. El ordenamiento final fue $A_1 > A_0 > A_2 > (A_3, A_4)$. Con este ordenamiento si escogemos $\lambda = 0.7$ hay una clara violación de lo que sugiere la relación binaria de preferencia respecto a A_0 y A_1 ($n_v = 1$). Obviamente A_2, A_3, A_4, que deberían ser irrelevantes, juegan un papel decisivo al decidir la posición relativa de A_0 y A_1.

Ejemplo 2:

Supongamos que las alternativas a,b y c se evalúan utilizando cinco criterios, con los siguientes perfiles:

C1: a b c
C2: a b c
C3: a b c
C4: c a b
C5: c b a

Calculando σ por (5) tenemos la matriz dada en la tabla 4

Tabla 4

	a	b	c
a	-	0.8	0.6
b	0.2	-	0.6
c	0.4	0.4	-

Resolviendo (1) obtenemos el orden completo y estricto a > b> c (aOb y bOc), con $n_v=0$, $n_d=0$, $n_c=3$, and $\lambda=0.6$. Si el grado de credibilidad se considera demasiado bajo, podemos resolver de nuevo (1) aumentando la prioridad de λ. Se llega a otra solución óptima de Pareto en que el ordenamiento es a >(b,c) (aOb, aOc, cRb y bRc) with $n_v=0$, $n_d=1$, $n_c=1$, y $\lambda=0.8$. Con ese mismo nivel de credibilidad e iguales valores $n_v=0$, $n_d=1$, $n_c=1$, es óptimal la solución (a ,c) > b .

Observe que si aceptamos la solución con $\lambda= 0.8$ no existe una alternativa d capaz de hacer surgir dudas sobre aOb. Sería necesario que $\sigma(b,d)= 0.8$ y $\sigma(d,a)=0.8$. Es imposible cumplir simultáneamente esas condiciones.

Sin embargo, si se acepta la solución con $\lambda= 0.6$ y si además $\beta\leq0.2$, podemos encontrar d que crea ciclos con a y b. Considere los siguientes perfiles:

C1: a b d c
C2: a b d c
C3: d a b c
C4: c d a b
C5: c b d a

que dan la matriz de sobreclasificación de la tabla 5

Tabla 5

	a	b	c	d
a	-	0.8	0.6	0.4
b	0.2	-	0.6	0.6
c	0.4	0.4	-	0.4
d	0.6	0.4	0.6	-

Resolviendo (1') con prioridad lexicográfica para n_v, obtenemos tres soluciones optimales de Pareto :

a >b>d >c
d>a>b >c
b >d>a >c

en todos los casos con $n_v=1$, $n_d=1$, $n_c=2$, and y= 0.6. Si nos limitamos a este nivel de credibilidad, no hay razones para escoger una en particular de las soluciones. Pueden surgir dudas sobre aOb.

Puede que una acción d como la que aparece antes no sea realista, o sea infactible (por ejemplo, si el comportamiento de a en los tres primeros criterios es virtualmente óptimo); entonces un análisis semejante no es necesario. Pero si d fuera una opción realista, puede cuestionarse aOb.

De cualquier manera, tomando en cuenta las diferentes soluciones obtenidas, creemos que hay razones de peso para proponer el ordenamiento a >(b,c) (con credibilidad 0.8) o quizás a >b >c con menor credibilidad ($\lambda = 0.6$).

5 Conclusiones

El ordenamiento solución que se obtiene de resolver el problema de optimización (1) tiene magníficas propiedades por el modo en que considera la información de σ, y por su mayor consistencia respecto a alternativas irrelevantes en el sentido de Arrow (propiedades 3 , 4 y 5). De hecho, hemos asignado un nuevo contenido al conocido Principio de Independencia, aceptando la influencia de acciones fuera del conjunto de decisión cuando aportan información relevante para el ordenamiento; y damos un método para detectar cuáles son las acciones que pueden aportar esa información. El eclecticismo de la propuesta le permite reunir algunas propiedades deseables de diversas tendencias de ayuda a la decisión, tratando de conciliar dos opuestas maneras de pensar representadas por escuelas contemporáneas; en cierto sentido, el enfoque normativo aparece como un caso particular de otro más general basado sobre preferencias borrosas (propiedad 6). Con una modelación mucho más laxa que la que realiza la escuela normativa de la decisión, sin apartarse de los principios básicos que se identifican con la racionalidad, esta propuesta puede convertirse en obligada referencia cuando se desean diseñar agentes inteligentes que deban modelar preferencias del decisor humano o reflejar prioridades de un grupo.

El método es aplicable a cualquier problema de decisión en que las preferencias se modelen con una relación binaria borrosa; ello sucede típicamente en problemas de valoración multicriterio o decisiones en grupo, aunque no se restringe a estas situaciones comunes; las relaciones borrosas también pueden modelar situaciones de riesgo o incertidumbre de otra naturaleza. El método no requiere de características particulares de la relación de preferencia borrosa, aunque cuando ella está construida sobre principios análogos a reglas de votación resulta más fácil considerar si existen alternativas fuera del conjunto de decisión capaces de poner en duda la información de mayor valor procedente del ordenamiento final.

Apéndice

Algunos Aspectos del Algoritmo Genético de Leyva y Fernández, 1999

El algoritmo desarrollado nos permite explotar una relación de sobreclasificación borrosa con el propósito de construir una recomendación para el problema del ordenamiento de un conjunto de alternativas o acciones potenciales. Una solución potencial para este problema es un ordenamiento de las acciones potenciales en orden de preferencias decreciente. Estas acciones (genes) se unen para formar una cadena de valores (cromosoma). El cromosoma se representará como una cadena cuyos símbolos pertenecen a un alfabeto n-ario, donde n es el número de acciones en el problema de decisión. Una acción codificada con el valor a_{ki} en la i-esima entrada de la cadena significa que la acción codificada con el valor a_{ki} está ubicada en la i-esima posición del ordenamiento y, además, decimos que a_{ki} es preferida a a_{kj} si $i < j$, donde $a_{ki} \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ es una permutación de $[1, 2, \ldots, n]$. Cada individuo está asociado con un número λ ($0 \le \lambda \le 1$) que está directamente relacionado con el nivel de credibilidad de una relación de sobreclasificación firme (no borrosa) definida sobre el conjunto de acciones potenciales. La medida de adaptabilidad de un individuo se divide en dos, una llamada función de inadaptabilidad y la otra función de infactibilidad. La función de inadaptabilidad f de un individuo **p** con nivel de credibilidad λ se define de la siguiente manera:

Sea $\mathbf{p} = a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kn}$ la representación esquemática del cromosoma de un individuo y supongamos que a_{ki} y a_{kj} son dos acciones tal que $\sigma(a_{ki}, a_{kj}) \ge \lambda$ y $\sigma(a_{kj}, a_{ki}) \le \lambda - \beta$ ($\beta > 0$, representando un nivel de umbral), entonces estamos de acuerdo que "a_{ki} sobreclasifica a a_{kj}" ($a_{ki}\, S^{\lambda}\, a_{kj}$) y "$a_{kj}$ no sobreclasifica a a_{ki}" ($a_{kj}\, nS^{\lambda}\, a_{ki}$). En este caso en la relación de sobreclasificación firme generada por λ, S_A^{λ}, se asume una preferencia a favor de a_{ki}. Entonces: $f(\mathbf{p}) = \mathbf{card}\,\{(a_{ki}, a_{kj}) : a_{ki}\, nS\, a_{kj}$ y $a_{kj}\, nS\, a_{ki}$ $i = 1, 2, \ldots, n-1, j = 2, 3, \ldots, n, i < j\}$ donde $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ es una permutación de $[1, 2, \ldots, n]$.

$f(\mathbf{p})$ es el número de incomparabilidades entre las parejas de acciones (a_{ki}, a_{kj}) en el individuo $\mathbf{p} = a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kn}$ en el sentido de la relación firme S_A^{λ}.

La infactibilidad u de un individuo **p** pretende medir cuán "infactible" es (en términos relativos) y se define de la siguiente manera:

$u(\mathbf{p}) = \mathbf{card}\,\{(a_{ki}, a_{kj}) : a_{ki}\, S\, a_{kj}$ y $a_{kj}\, nS\, a_{ki}; i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n, i > j\}$

$u(\mathbf{p})$ es el número de preferencias entre las acciones de un individuo $\mathbf{p}$ que no están "bien ordenadas" en el sentido de S_A^{λ}.

Un individuo $\mathbf{p}$ es factible si $u(\mathbf{p}) = 0$ e infactible si $u(\mathbf{p}) > 0$. Es claro y parece natural definir que la función de infactibilidad toma un valor mínimo de cero si y sólo si la solución es factible. Cada uno de los individuos $\mathbf{p}$ pueden representarse por una triada de valores f, u y λ.

Estamos interesados en:

i) individuos con valor de infactibilidad igual a cero, pues se eliminan las contradicciones entre el ordenamiento y la información de la relación de preferencia borrosa

ii) individuos cuya inadaptabilidad es tan cercana a cero como sea possible, pues así se incrementa la comparabilidad de S sobre A.

iii) individuos cuyo nivel de credibilidad es cercano a 1.

En la práctica el requisito que se busca para la función de inadaptabilidad impide que los valores de λ se acerquen a 1, pues en tal caso habrían muchos genes incomparables con S.

Entonces se utiliza un algoritmo evolutivo para resolver el problema de optimización multicriterio Min u, f, Max λ
R_s, $\lambda \in [0,1]$ $\lambda \geq \lambda_0$
donde R_s es un orden total estricto de A. Además del operador de mutación que intercambia genes, esta búsqueda utiliza el método UX2 para cruzamiento y una técnica especial de selección diseñada para este problema, que toma en cuenta su naturaleza multiobjetivo y la prioridad lexicográfica de la función de infactibilidad.

Referencias

Arrow, K.J., Reynaud, H. (1986) : *Social choice and multicriterion decision making*, MIT Press, Cambridge.

Boyssou, D., Vincke, Ph. (1995) : *Ranking alternatives on the basis of preference relations: a progress report with special emphasis on outranking relations*, Série Mathématiques de la Gestion, Université Libre de Bruxelles.

Brans, J. P., Vincke Ph.(1985): A preference ranking organization method, *Management Science* 31 , 647-656.

Coello, C. (1999): A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques, *Knowledge and Information Systems 1*, 269-308.

Fodor, J., Roubens, M. (1994) : *Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer, Dordrecht

French, S. (1986) : *Decision Theory: an introduction to the mathematics of Rationality*, Halsted Press, NY- Brisbane- Chichester.

Leyva, J.C., Fernández, E. (1999): A genetic algorithm for deriving final ranking from a fuzzy outranking relation, *Foundations of Computing and Decision Sciences 24*, no. 1, 33-47.

Michalewicz, Z. (1996): *Genetic Algorithm + Data Structures = Evolution Programs*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Orlovski, S.A.(1978):Decision-making with a fuzzy preference relation, *Fuzzy Sets and Systems* 1 , 155-167.

Perny, P., Roy, B. (1992): The use of fuzzy outranking relations in preference modeling, *Fuzzy Sets and Systems 49*, 33-53.

Pomerol, Ch. (1995): Artificial Intelligence and Human Decision Making, En Slowinski R., (ed.) *"OR: Toward Intelligent Decision Support", 14th European Conference on Operational Research*, 169-196.

Roy, B. (1996) : *Multicriteria methodology for Decision Aiding*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht- Boston- London.

Roy, B. (1990): *The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods*, En Bana e Costa, C.A., (ed.) *Reading in multiple criteria decision aid*, Springer-Verlag, Berlin , 155-183.

Roy, B., Vanderpooten, D. (1995):The european school of MCDA: A historical review. En Slowinski R., (ed.) *"OR: Toward Intelligent Decision Support", 14th European Conference on Operational Research*, 39-65.

Russell, S., Norvig, P. (1996): *Inteligencia Artificial. Un enfoque moderno*, Prentice Hall Hispanoamericana, México – Nueva York.

Eduardo Fernández González *es de origen cubano. Terminó sus estudios doctorales en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Poznan, en 1987. Actualmente es académico de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Su interés científico principal está en los modelos matemáticos de ayuda a la toma de decisiones y en el desarrollo de sistemas de apoyo a la decisión.*

Juan Carlos Leyva Lopez *es originario del Estado de Sinaloa, Mexico. Realizó sus estudios de Licenciatura y Maestría en el Instituto Politecnico Nacional. Es académico de la Universidad Autónoma de Sinaloa, donde se doctoró en Ciencias de la Computacion en el año 2001. Su área de interes actual es la modelación matemática de ayuda a la toma de decisiones y el desarrollo de sistemas de apoyo a la decisión.*