

Mapeos de Contraste Morfológicos Sobre Particiones Basados en la Noción de Zona Plana

Morphological Contrast Mappings on Partitions Based on the Flat Zone Notion

Jorge Domingo Mendiola Santibañez¹ e Ivan R. Terol-Villalobos²

¹Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro
Cerro de las Campanas S/N, Apartado Postal 76000, Querétaro, México
²CIDETEC, SC, Parque Tecnológico Querétaro S/N,
Sanfandilia-Pedro Escobedo C.P. 76700-Apartado 064, México
e-mail : mendijor@sunserver.uaq.mx, famter@ciateq.net.mx

Artículo recibido en Febrero 15, 2002; aceptado en Junio 30, 2002

Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio sobre el contraste en morfología matemática usando transformaciones conexas. El contraste morfológico está basado en la noción de mapeos de contraste, los cuales tienen como origen la transformación de Kramer y Bruckner. El principal problema en esta transformación, es el uso de la erosión y la dilatación como primitivas. Esto genera el riesgo de degradar la imagen cuando la transformación de Kramer and Bruckner es iterada. Para atenuar este inconveniente, se propone el uso de transformaciones conexas basadas en la noción de zona plana. También se muestra que la noción de zona plana permite tener un mejor control de la imagen de salida cuando los operadores de contraste son utilizados. El interés de esta propuesta, es ilustrado comparando varios mapeos de contraste idempotentes usando las nociones de zona plana y píxel. Finalmente, una versión modificada del algoritmo de Kramer y Bruckner es propuesta.

Palabras clave: Morfología matemática, morfología sobre particiones, contraste morfológico, mapeo de contraste, zona plana, partición.

Abstract

In this work a morphological contrast study is made using connected transformations. The morphological contrast is based on the notion of toggle mappings. The notion of toggle mappings progressed in the way suggested by Kramer and Bruckner transformation. Since the Kramer and Bruckner transformation uses the erosion and dilation as patterns, some problems in this transformations are the oscillations and jumps produced when it is iterated. To attenuate this inconvenience a connected approach based on the flat zone notion is proposed. This option allows a better control of the output image when the toggle mappings are applied. The interest of the use of connected transformations in contrast enhancement is illustrated by comparing idempotent toggles using flat zone and pixel notions. Finally, a modified version of the Kramer and Bruckner transformation on partition is proposed.

Key words: Mathematical morphology, morphology on partitions, morphological contrast, contrast mapping, flat zone, partition.

1 Introducción

El mejoramiento del contraste es una de las técnicas más desarrolladas en el procesamiento de imágenes usando las técnicas tradicionales. Esta área de tratamiento de imágenes enfocada a acentuar regiones, contornos, etc., ha sido tratada desde diferentes enfoques; operaciones sobre puntos, operaciones espaciales, histogramas e inclusive usando pseudo-color (Jain, 1989). Todo lo contrario a otras técnicas de procesamiento de imágenes, en la metodología de procesamiento de imágenes conocida como morfología matemática, el problema del mejoramiento del contraste no ha sido tratado de forma sistemática. Pocos trabajos versan de manera particular sobre el contraste morfológico. (Serra, 1988a; Meyer y Serra, 1989; Potjer, 1996; Salembier, 1993), sin embargo, un punto en común que se observa en todos estos estudios, es la importancia del uso del filtrado morfológico en el mejoramiento del contraste.

Esta forma de buscar resolver un problema de procesamiento de imágenes a partir del filtrado no es nueva en morfología matemática. De hecho, el filtrado morfológico juega un papel fundamental en la segmentación de imágenes. En lo que se refiere a este proceso de segmentación de imágenes en morfología matemática, la técnica frecuentemente utilizada se le conoce como el método de vertientes y marcadores. Dicha técnica está formada por dos etapas fundamentalmente; la detección de marcadores y la aplicación de la transformación por vertientes (Meyer y Beucher, 1990). En la primera etapa, que consiste en la detección de marcadores, se utilizan filtros morfológicos para realizar esta tarea. Esto requiere de un buen conocimiento tanto de las imágenes a tratar como del filtrado morfológico. En la segunda etapa, la imagen gradiente (la imagen original u otra imagen derivada de la imagen original) es modificada al imponer los marcadores detectados como sus mínimos regionales. Posteriormente, la transformación por vertientes es aplicada a la imagen modificada, lo que permite detectar los contornos de las regiones a segmentar. En lo que se refiere al contraste morfológico, la importancia del filtrado se puede observar principalmente en los primeros trabajos desarrollados sobre este tema, donde los filtros morfológicos son usados para generar la noción de mapeos de contraste (Serra, 1988a; Meyer y Serra, 1989). La idea principal en este tipo de mapeo, es comparar cada punto de

la imagen original con dos patrones, y escoger el valor más cercano de los niveles de gris en los patrones con respecto al nivel de gris en la imagen original. Esta forma de construir mapeos de contraste fue sugerida por la transformación de Kramer y Bruckner (1975). Sin embargo, en dicha transformación se presentan algunos problemas debido a inestabilidades cuando se itera. El principal problema es el uso de transformaciones no idempotentes como la erosión y la dilatación para generar los mapeos de contraste (Serra, 1988a). Cuando la erosión o la dilatación son usadas como primitivas (patrones) para construir los mapeos de contraste, existe el riesgo de degradar la imagen cuando se iteran estos mapeos. Para atenuar este problema, Serra (1988a) propone el uso de transformaciones idempotentes, mientras que Terol-Villalobos (1996) usa estas transformaciones básicas, la dilatación y la erosión, de manera separada lo que permite atenuar la degradación de la imagen. El trabajo desarrollado por Terol-Villalobos (1996) llevó a la propuesta de una clase de filtros (filtros morfológicos por pendientes) cuyas imágenes de salida tienen un contraste bien definido; en cada punto de la imagen de salida el valor de su gradiente es mayor que el parámetro del filtro o tiene valor cero. El interés original de esta propuesta, desde el punto de vista práctico, era el poder modificar la imagen gradiente, trabajando sobre la imagen original, sin necesidad de imponer marcadores como en el caso de la técnica tradicional de vertientes y marcadores, y de esta manera, poder utilizar la transformación de vertientes directamente sobre la imagen filtrada o sobre el gradiente de la imagen filtrada para su segmentación. Posteriormente, usando esta idea se propuso una familia de filtros morfológicos por pendientes secuenciales (Terol-Villalobos y Cruz-Mandujano, 1998a; Terol-Villalobos, 1998b). La aplicación de los filtros morfológicos por pendientes de manera secuencial, permitió tener un mejor control sobre la segmentación de la imagen y al mismo tiempo la generación de transformaciones que permitían mejorar el contraste de la imagen. Sin embargo, algunas veces los filtros morfológicos por pendientes son sensibles a algunas configuraciones de contornos ruidosos. Con el objeto de atenuar este inconveniente, Terol-Villalobos (2001) propuso los filtros morfológicos por pendientes conexos, trabajando sobre particiones generadas por la noción de zona plana. El concepto de zona plana es muy importante porque permite definir las componentes conexas en imágenes binarias, así como en imágenes numéricas. En particular, las propuestas en Terol-Villalobos (2001) permiten abordar los problemas básicos en análisis de imágenes; la extracción de contornos y la partición de la imagen, los cuales son problemas complementarios. Dando solución a uno de ellos el otro también está resuelto. En efecto, la correcta extracción de contornos de una imagen nos permite definir sus regiones.

Igualmente, el mejoramiento del contraste y la segmentación de la imagen pueden ser vistos como problemas complementarios usando estas transformaciones. Es decir, al mejorar el contraste de las regiones de interés, el problema de la detección de contornos (segmentación de la imagen) también puede ser resuelto.

La idea de trabajar transformaciones morfológicas sobre particiones, es lo que motiva el presente estudio el cual se enfoca a la búsqueda de nuevos mapeos de contraste conexos que permitan resolver el problema de la segmentación de imágenes. Puesto que una transformación conexa no rompe las zonas planas, entonces la transformación debe actuar a nivel de zona plana y no a nivel de píxel. Para definir las transformaciones morfológicas básicas a nivel de zona plana, se usa un estudio realizado por Vincent (1989). Dicho trabajo, realizado sobre imágenes binarias, se refiere a la morfología matemática sobre particiones. Como la noción de zona plana permite generar una partición de la imagen numérica, es posible definir la erosión y dilatación sobre particiones basadas en la noción de zona plana. A partir de la dilatación y la erosión, se pueden construir directamente la apertura y la cerradura sobre particiones, que son las primitivas usadas en este trabajo para construir los mapeos de contraste. En el presente estudio se proponen las transformaciones morfológicas básicas en niveles de gris sobre particiones.

En particular, el trabajo se dirige a un estudio del contraste morfológico conexo sobre particiones usando la noción de zona plana. El interés del uso de la morfología matemática en el contraste morfológico, utilizando la noción de zona plana, es ilustrado comparando varios mapeos de contraste usando la noción de zona plana y la noción de píxel.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma. La sección 2 presenta las transformaciones básicas en morfología matemática y los conceptos básicos sobre conectividad. En la sección 3, se introducen las diferentes transformaciones morfológicas básicas sobre particiones usando la noción de zona plana. Finalmente, en la sección 4, se introducen varios mapeos de contraste sobre particiones y se realiza un estudio sobre el comportamiento de estos mapeos.

2 Transformaciones Morfológicas Básicas y la Noción de Conectividad

2.1 Nociones Básicas del Filtrado Morfológico

La morfología matemática se basa principalmente en una clase de transformaciones llamadas crecientes. Una transformación T se dice creciente si para dos conjuntos X , Y tal que $X \subset Y \Rightarrow T(X) \subset T(Y)$. En el caso de imágenes en niveles de gris, la contención es sustituida por el orden usual; i.e. para cualesquiera dos funciones f, g con $f(x) < g(x) \forall x \Rightarrow T(f(x)) < T(g(x))$. En otras palabras, las transformaciones crecientes preservan el orden. Una segunda propiedad importante en morfología matemática es la idempotencia de las transformaciones. Una transformación T es idempotente si y sólo si $T(T(f)) = T(f)$. El uso de ambas propiedades juega un papel primordial en la teoría del filtrado morfológico. En efecto, en morfología matemática se le llama filtro morfológico a toda

transformación creciente e idempotente. Los filtros morfológicos básicos son la apertura morfológica $\gamma_{\mu B}$ y la cerradura morfológica $\varphi_{\mu B}$ usando un elemento estructurante μB , con B el elemento estructurante elemental (3×3 píxeles en este trabajo) conteniendo el origen, \hat{B} su transpuesto ($\hat{B} = \{-x : x \in B\}$) y μ un factor de homotecia.

De esta forma, el elemento estructurante de tamaño μB estará formado por un conjunto de tamaño $(2\mu+1) \times (2\mu+1)$ píxeles. La apertura y la cerradura morfológicas se expresan a partir de la dilatación $\delta_{\mu B}$ y la erosión $\varepsilon_{\mu B}$.

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu B}(f)(x) &= \delta_{\mu \hat{B}}(\varepsilon_{\mu B}(f))(x) \\ \varphi_{\mu B}(f)(x) &= \varepsilon_{\mu \hat{B}}(\delta_{\mu B}(f))(x) \end{aligned} \quad (1)$$

La erosión y la dilatación están dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu B}(f)(x) &= \wedge \{f(y); y \in \mu \hat{B}_x\} \\ \delta_{\mu B}(f)(x) &= \vee \{f(y); y \in \mu \hat{B}_x\} \end{aligned} \quad (2)$$

donde \vee y \wedge son los operadores supremo e ínfimo. En el caso Z^2 (Z es el conjunto de los enteros) o en imágenes digitales el supremo es sustituido por el valor máximo, mientras que el ínfimo por el valor mínimo.

Comentario. En la continuación del texto, omitiremos el elemento estructurante elemental B . Las siguientes expresiones son equivalentes $\gamma_{\mu} = \gamma_{\mu B}$. Cuando el elemento estructurante tiene factor de homotecia $\mu = 1$ omitiremos tanto el elemento estructurante como el factor de homotecia (por ejemplo $\delta_{\mu B} = \delta_B = \delta$).

2.2 Conectividad

La noción de conectividad es un concepto definido en topología que se establece también, bajo otra forma, en la teoría de grafos. Esta noción tiene importantes aplicaciones en procesamiento de imágenes por computadora: las componentes conexas de una imagen corresponden a sus diferentes partes que la componen. En el caso puramente digital la noción de trayectoria arco-conexa permite definir una componente conexa. Una trayectoria arco-conexa P entre dos puntos x, y es una secuencia de puntos, p_1, p_2, \dots, p_n , tal que $p_1 = x$, $p_n = y$, y para todo i (p_i, p_{i+1}) son vecinos.

De esta forma, una componente A es arco-conexa si para todo par de píxeles x, y en A , existe una trayectoria completamente incluida en A uniendo x y y . La existencia de una nueva definición de conectividad permitiría separar de otra manera un objeto en sus diferentes partes conexas.

Esta es una de las razones que originó la definición de conectividad en morfología matemática. La conectividad fue establecida por Serra (1988b), por medio del concepto de clase conexa. Serra caracteriza de dos formas la conectividad sobre los subconjuntos de un espacio E . La

primera consiste de un conjunto de propiedades de la familia de todos los subconjuntos de E . Este conjunto de propiedades comprende los siguientes requerimientos: el conjunto vacío y cada punto x del espacio E son conexos, y la unión de conjuntos conexos conteniendo un punto dado es conexa. De manera formal,

Definición 1. Una clase conexa C en $\wp(E)$ es un subconjunto de $\wp(E)$ tal que:

- a) $\emptyset \in C$ para toda $x \in E$, $\{x\} \in C$.
- b) Para cada familia C_i en C , $\bigcap_i C_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_i C_i \in C$.

Donde $\wp(E)$ representa el conjunto de todos los subconjuntos del espacio E . Un elemento de C es llamado un conjunto conexo. Observe que esta definición se encuentra ligada a la definición de subconjuntos conexos de un espacio topológico. En efecto, si E es un espacio topológico, entonces el conjunto obtenido por la unión de subconjuntos conexos con intersección no vacía, es conexo.

La segunda forma para caracterizar la conectividad consiste en una definición equivalente a la noción de clase conexa, que utilizaremos en este trabajo para introducir nuestra propuesta. Esta caracterización de la conectividad basada en una familia de aperturas se expresa en el siguiente teorema (Serra, 1988b).

Teorema 1. (Conectividad caracterizada por aperturas). La definición de clase conexa C es equivalente a la definición de una familia de aperturas (connected pointwise openings) $\{\gamma_x, x \in E\}$ tal que:

- (a) $\forall x \in E, \gamma_x(\{x\}) = \{x\}$
- (b) $\forall x, y \in E$ y $A \subset E, \gamma_x(A) = \gamma_y(A)$ o $\gamma_x(A) \cap \gamma_y(A) = \emptyset$
- (c) $\forall x \in E$ y $A \subset E, \forall x \notin A \Rightarrow \gamma_x(A) = \emptyset$

Cuando la transformación γ_x está asociada con la conectividad usual (arco-conectividad) en Z^2 , la apertura $\gamma_x(A)$ puede ser definida como la unión de todas las trayectorias conteniendo el punto x que están incluidas en A . De esta forma, cuando un espacio está equipado con la apertura γ_x , la conectividad puede ser expresada usando γ_x . Un conjunto $A \subset Z^2$ es conexo si y sólo si para cualquier punto $x \in A, \gamma_x(A) = A$. En la Figura 1 se ilustra el comportamiento de esta apertura. La componente conexa de la imagen de entrada X (Fig. 1(a)), a la cual pertenece el punto x , es la salida de la apertura $\gamma_x(X)$. Las otras componentes son eliminadas (Fig. 1(b)).

Un ejemplo interesante de una nueva conectividad, que verifica la noción de clase conexa, es la conectividad generada por dilataciones. Las imágenes en las Figs. 1(c)-(e) ilustran esta conectividad. En Fig. 1(c) se muestra la dilatación de la imagen original por un elemento estructurante μB con $\mu = 4$. En la Fig. 1(d) se muestra la componente arco-conexa de la imagen en la Fig. 1(c) marcada por el punto x , mientras que en la Fig. 1(e) se muestra la "componente" conexa de acuerdo a la conectividad generada por dilataciones y expresada por la

apertura: $\gamma_x^d(X) = \gamma_x(\delta_\mu(X)) \cap X$. En otras palabras, la componen conexa según la conectividad generada por $\gamma_x^d(X)$, está formada por 4 componentes arco-conexas. Este tipo de problemas se presenta frecuentemente en física de materiales, imágenes médicas (de células por ejemplo), etc., donde un conjunto de componentes conexas forman una sola identidad y deben ser tratadas como tal para entender el fenómeno que dio lugar a este tipo de formas. Una solución elegante a este tipo de problemática es la generalización de la noción de conectividad. En Heijmans (1997) se ilustran diferentes conectividades que verifican la noción de clase conexa, mientras que en Terol-Villalobos y Vargas-Vázquez (2002), se propone una nueva clase de aperturas y cerraduras que son conexas en el sentido de la definición (1). Un concepto fundamental en este trabajo es la noción de partición.

Definición 2 (Partición). Dado un espacio E, una función $P: E \rightarrow \wp(E)$ es llamada una partición de E si: (a) $x \in P(x)$, $x \in E$, (b) $P(x) = P(y)$ o $P(x) \cap P(y) = \emptyset$, para $x, y \in E$.

Esta definición implica que la unión de los elementos de la partición recubre el espacio E. En particular, todo punto $x \in E$ pertenece exactamente a un elemento de la partición y los elementos de la partición son disjuntos (para cualesquiera par de elementos diferentes $P(x), P(y)$ de P ; $P(x) \cap P(y) = \emptyset$). Si existe una conectividad definida en E y la componente $P(x)$ pertenece a esa conectividad $\forall x$, decimos que la partición es conexa. En la continuación del texto, todo el trabajo se desarrolla en el caso discreto $E=Z^2$.

El segundo concepto importante en este trabajo es la noción de zonas planas expresado por la siguiente definición.

Definición 3. Las zonas planas de una función $f: Z^2 \rightarrow Z$ se definen como las componentes conexas (más grandes) de puntos con el mismo valor de la función.

Expresaremos la zona plana de una función f en el punto x por el operador $F_x(f)$. En la Figura 2(a), se muestra una imagen conteniendo 5 zonas planas, mientras que en la Fig. 2(b) se ilustra el operador $F_x(f)$, el cual transforma la zona plana en un conjunto formado por una componente conexa.

Los conjuntos $F_x(f)$ y $F_y(f)$ correspondientes a las dos zonas planas marcadas por los puntos x, y de la imagen en

la Fig. 2(a) se ilustran en las Figs. 2(b) y 2(c), respectivamente. Observe que; (a) $x \in F_x(f)$, y (b) $\forall x, y$ $F_x(f) = F_y(f)$ o $F_x(f) \cap F_y(f) = \emptyset$: Esto implica que la noción de zona plana genera una partición de la imagen. Es decir, el conjunto de zonas planas de la imagen constituye una partición puesto que verifica las siguientes condiciones:

- La unión de zonas planas recubre completamente el dominio de la imagen.
- La intersección de dos zonas planas diferentes es el vacío; las zonas planas son disjuntas.

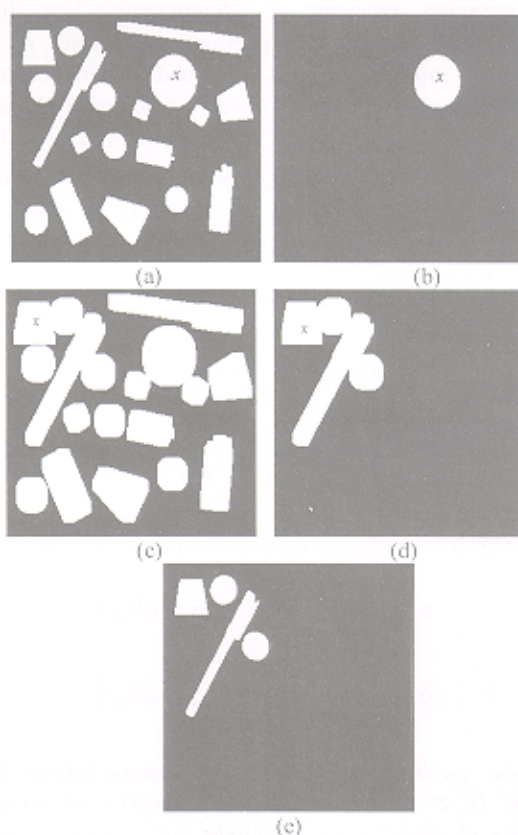


Figura 1. Extracción de componente conexa: (a) Imagen binaria X, (b) La apertura $\gamma_x(X)$ extrae la componente conexa de X a la cual pertenece el punto x, (c) Dilatado de X, $\delta_\mu(X)$, (d) Componente conexa de $\delta_\mu(X)$ marcada por x, (e) Conectividad generada por dilataciones; $\gamma_x^d(X)$

De este modo, es posible usar ambos conceptos sobre particiones: noción de zona plana que genera la partición y las transformaciones morfológicas que trabajan a nivel de vecindades. Para definir la noción de vecindad sobre la partición generada por la noción de zona plana se requiere definir la adyacencia entre elementos de la partición. Esta adyacencia es expresada por la siguiente definición usando la noción de zona plana.

Definición 4. Sea x un punto de Z^2 equipado con γ_x . Dos zonas planas $F_x(f)$ y $F_y(f)$ en Z^2 se dicen adyacentes si: $F_x(f) \cup F_y(f) = \gamma_x(F_x(f) \cup F_y(f))$.

En la Figura 2 se ilustra la noción de zonas planas adyacentes. En las Figs. 2(b) y 2(c) se muestran dos zonas planas adyacentes, mientras que en la Fig. 2(d), la adyacencia es ilustrada según la expresión $F_x(f) \cup F_y(f) = \gamma_x(F_x(f) \cup F_y(f))$.

Definición 5. Sea x un punto de Z^2 equipado con γ_x . El conjunto de zonas planas A_x adyacentes a F_x está dado por: $A_x(f) = \{ F_{x'}(f); x' \in Z^2, F_x(f) \cup F_{x'}(f) = \gamma_x(F_x(f) \cup F_{x'}(f)) \}$.

Es decir, el conjunto A_x está formado por todas las zonas planas adyacentes a la zona plana F_x . En la Fig. 2(a), la zona plana F_x tiene cuatros zonas planas adyacentes.

Finalmente, dado que trabajaremos con operadores conexos, cuya característica importantes es que no generan nuevos contornos, utilizaremos la siguiente definición de operadores conexos.

Definición 6. Un operador ψ es conexo si y sólo si extiende las zonas planas de la imagen de entrada.

La forma de extender zonas planas en este trabajo se realizará fusionando aquellas que son adyacentes.

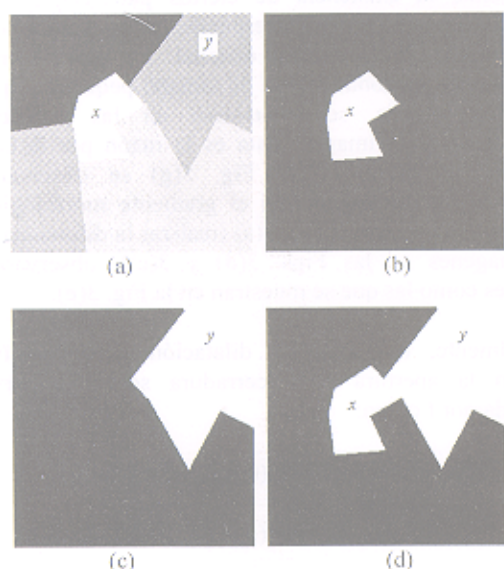


Figura 2. (a) Imagen f con 5 zonas planas. (b) Zona plana en el punto x , $F_x(f)$. (c) Zona plana en el punto y , $F_y(f)$. (d) las dos zonas planas son adyacentes; $F_x(f) \cup F_y(f) = \gamma_x(F_x(f) \cup F_y(f))$

3 Transformaciones Morfológicas sobre Particiones

En esta sección se propone una nueva representación de la imagen en niveles de gris. Dicha representación está formada por la función f y la partición P_f inducida por f usando la noción de zona plana. Esto implica que los operadores morfológicos descritos en esta sección van a operar sobre el par (f, P_f) . Se define entonces el elemento $(f, P_f)(x)$ como el valor de nivel de gris de la componente conexa $F_x(f)$. La dilatación y erosión morfológicas aplicadas sobre las zonas planas están dadas por:

$$\begin{aligned} \delta((f, P_f))(x) &= \max\{(f, P_f)(y); F_y(f) \in A_x(f) \cup \{F_x(f)\}\} \\ \varepsilon((f, P_f))(x) &= \min\{(f, P_f)(y); F_y(f) \in A_x(f) \cup \{F_x(f)\}\} \end{aligned} \tag{3}$$

donde \max y \min representan los valores máximo y mínimo. De este modo, el valor de la dilatación o de la

erosión en la zona plana F_x estará dado, respectivamente, por el máximo o el mínimo nivel de gris de los niveles de grises de las zonas planas adyacentes A_x y el de F_x . Puesto que la noción de elemento estructurante no existe en los operadores morfológicos sobre particiones, este elemento es eliminado de las definiciones de la dilatación y de la erosión. Note que la partición de la imagen original P_f siempre es usada en el cálculo de las transformaciones.

Puesto que se trabaja sobre el par (f, P_f) , se debería escribir la imagen de salida por el par $(\varepsilon(f, P_f), P_f)$ o $(\delta(f, P_f), P_f)$ en lugar de $\varepsilon(f, P_f)$. Sin embargo, por simplicidad en la notación, la imagen de salida está dada por $\varepsilon(f, P_f)$. De manera similar, esta convención es usada en toda transformación propuesta en este trabajo. La dilatación δ_λ y la erosión ε_λ de tamaño λ se obtienen iterando λ veces la dilatación y la erosión elemental dadas por las ecuaciones (3):

$$\delta_\lambda((f, P_f))(x) = \delta \dots \delta((f, P_f))(x) \tag{4}$$

λ veces

$$\varepsilon_\lambda((f, P_f))(x) = \varepsilon \dots \varepsilon((f, P_f))(x)$$

λ veces

La dualidad con respecto a la complementación entre la dilatación y la erosión se preserva. Lo que significa que únicamente es necesario especificar el complemento sobre el par (f, P_f) . El complemento de una función f está definido por $f^c(x) = g_{\max} - f(x) \forall x$, donde c representa el complemento (en general $g_{\max} = 255$ en las imágenes reales). Entonces, el complemento del par (f, P_f) está dado por (f^c, P_f^c) . Sin embargo, la partición inducida por f usando la noción de zona plana es la misma que la partición inducida por f^c : $P_f = P_f^c$. se tiene entonces que:

$$\delta_\lambda((f, P_f)(x) = [\varepsilon_\lambda((f^c, P_f^c))(x)]^c \tag{5}$$

En la Fig. 3 se ilustran las transformaciones dilatación y erosión sobre particiones aplicadas a la imagen en la Fig. 3(a). En las Figs. 3(a) y 3(b) se muestran respectivamente, la imagen original compuesta por 16 zonas planas y los contornos de la partición. Por convención en este trabajo al color blanco le corresponde el nivel de gris más grande (255) y al color negro el más pequeño (0). En las Figs. 3(c) y 3(d) se puede observar la erosión y la dilatación sobre particiones aplicadas a la imagen 3(a). Observe que la imagen erosionada en Fig. 3(c) tiene solamente 6 zonas planas, sin embargo, su partición asociada es la mostrada en la Fig. 3(b) que corresponde a la partición de la imagen original. El mismo comentario se puede expresar para la imagen dilatada en la Fig. 3(d) que contiene también 6 zonas planas.

Por medio de la erosión y de la dilatación sobre zona plana, el gradiente externo y el gradiente interno pueden ser expresados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \text{grade}((f, P_f))(x) &= \delta((f, P_f))(x) - (f, P_f)(x) \\ \text{gradi}((f, P_f))(x) &= (f, P_f)(x) - \varepsilon((f, P_f))(x) \end{aligned} \tag{6}$$

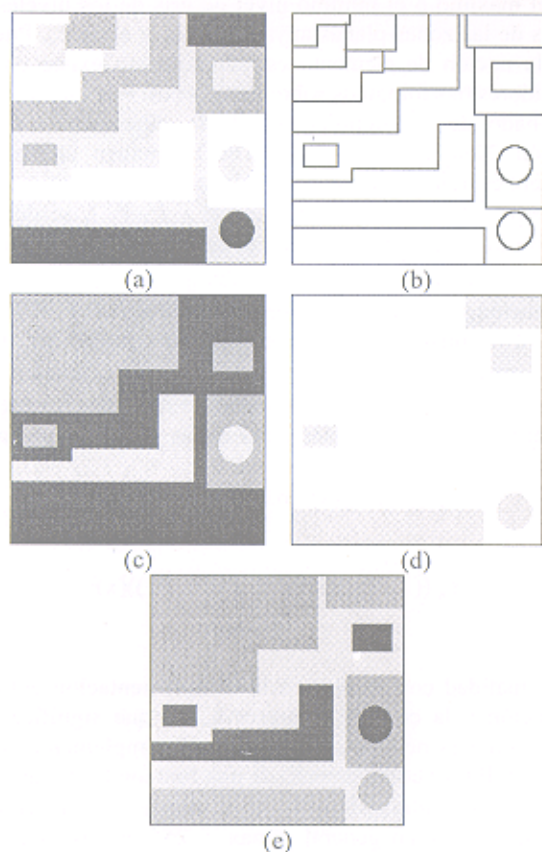


Figura 3. (a) Imagen original conteniendo 16 zonas planas, (b) Contornos de la partición generada por las zonas planas de la imagen (a), (c) Erosionado sobre partición de tamaño 1 de la imagen (a), (d) Dilatado sobre partición de tamaño 1 de la imagen (a), (e) substracción entre el dilatado y el erosionado.

La Fig. 4 ilustra el gradiente interno, expresada en ecuación (6) usando la noción de zona plana. Consideremos que la zona plana con nivel de gris 40 tiene 4 zonas adyacentes (Fig. 4(a)). La erosión en esta zona plana se muestra en la Fig. 4(b), mientras que en la Fig. 4(c) se ilustra el valor del gradiente interno en esta zona plana.

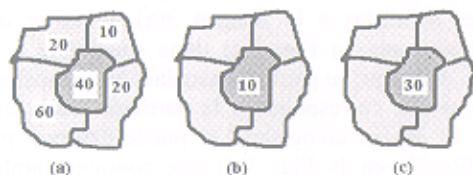


Figura 4. (a) Zona plana con nivel de gris 40 y sus 4 zonas planas adyacentes, (b) Valor del nivel de gris de la erosión, (c) Valor de nivel de gris del gradiente interno

De la misma forma, el gradiente morfológico sobre partición, se puede definir a partir de la dilatación y de la erosión:

$$\text{gradm}((f, P_f))(x) = \delta((f, P_f))(x) - \varepsilon((f, P_f))(x) \quad (7)$$

La transformación gradiente se ilustra en la Fig. 5. En la Fig. 5(a) se muestra la imagen original de tamaño 256x256 píxeles (65536 píxeles), mientras que en la Fig. 5(b) se muestra una región de la imagen ampliada. La imagen original está compuesta de 37240 zonas planas. En las Figs. 5(c) y 5(e) se ilustran la dilatación y la erosión sobre partición de tamaño 1, respectivamente, mientras que en las Figs. 5(d) y 5(f) se muestra el detalle de ambas transformaciones. La Fig. 5(g) muestra los contornos detectados de la Fig. 5(a) al aplicar el gradiente morfológico sobre partición (ver ecuación 7). Observe particularmente en las imágenes de las Figs. 5(d) y 5(f), que corresponden al detalle de las imágenes dilatada y erosionada, la existencia de ciertos patrones de forma variable. Estos patrones corresponden a las formas de las zonas planas de la imagen original. En general en una imagen real, las zonas planas de tamaño pequeño, un píxel o varios píxeles, se encuentran en las transiciones (contornos) de la imagen. Esta es la razón por la cual el gradiente mostrado en la Fig. 5(g) se observan los contornos de la imagen. Si el gradiente morfológico se aplicara a la imagen en Fig. 3(a) (realizar la diferencia entre las imágenes en las Figs. 3(d) y 3(c)), observaríamos regiones como las que se muestran en la Fig. 3(e).

Igualmente, utilizando la dilatación y la erosión se definen la apertura y la cerradura sobre la partición inducida por f como:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda((f, P_f))(x) &= \delta_\lambda((\varepsilon_\lambda(f, P_f), P_f))(x) \\ \varphi_\lambda((f, P_f))(x) &= \varepsilon_\lambda((\delta_\lambda(f, P_f), P_f))(x) \end{aligned} \quad (8)$$

En la Figs. 6(a) y 6(b) se muestran la apertura y la cerradura morfológicas sobre particiones obtenidas de la imagen en la Fig. 3(a). Para obtener la apertura, se aplica la dilatación de la imagen Fig. 3(c) usando la partición de la imagen original (ver Fig. 3(b)). Para obtener la cerradura, se aplicó la erosión sobre la imagen 3(d) usando también la partición de la imagen original.

En la Fig. 7 se muestra otro ejemplo de la apertura y la cerradura sobre particiones (ecuación (8)), y se compara con la apertura y la cerradura morfológicas (ver ecuación (1)). Las Figs. 7(b) y 7(c) ilustran la apertura y la cerradura morfológicas calculadas de la imagen original mostrada en la Fig. 7(a), mientras que las Figs. 7(d) y 7(e) muestran la apertura y la cerradura sobre particiones usando la noción de zona plana. El tamaño utilizado en todas las transformaciones es $\lambda=8$. Observe que las transformaciones sobre partición generada por la noción de zona plana son más fuertes que las aperturas y cerraduras morfológicas tradicionales. Una vez definidas la apertura y la cerradura sobre particiones, diferentes transformaciones morfológicas pueden ser creadas a partir de estos filtros básicos.

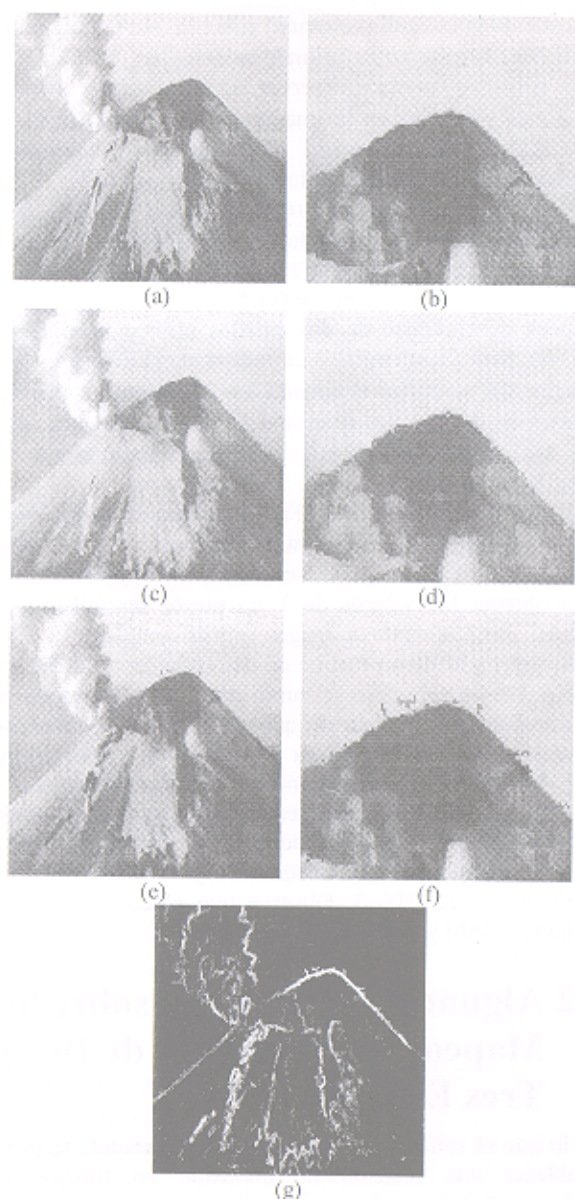


Figura 5. (a) Imagen original, (b) Detalle de la imagen original, (c) Dilatado tamaño 1 sobre la partición de la imagen original, (d) Detalle de la imagen dilatada, (e) Erosionado tamaño 1 sobre la partición de la imagen original, (f) Detalle de la imagen erosionada, (g) Gradiente morfológico sobre partición de la imagen original



Figura 6. (a) Apertura sobre partición de tamaño 1 de la imagen 3(a) o dilatado de imagen 3(c), (b) Cerradura sobre partición de tamaño 1 de la imagen 3(a) o erosionado de imagen 3(d)

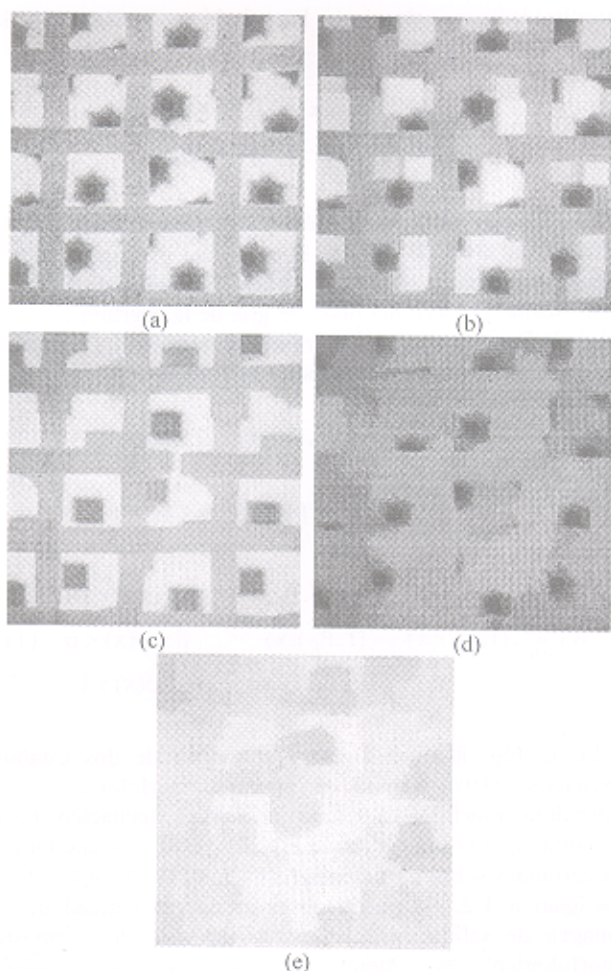


Figura 7. (a) Imagen original, (b), (c) Apertura y cerradura morfológicas de tamaño 8 de la imagen original, (d), (e) Apertura y cerradura sobre partición de tamaño 8 de la imagen original

4 Mapeos de Contraste Morfológicos

4.1 Mapeos Idempotentes de Dos y Tres Estados (Primitivas)

Como se expresó en la introducción, la idea para construir los mapeos de contraste, consiste en seleccionar para cada punto de la imagen el valor de nivel de gris entre los diferentes patrones (primitivas) utilizados de acuerdo a un criterio de proximidad. Una manera de atenuar la degradación de la imagen de salida, es utilizando primitivas que sean transformaciones idempotentes, como se describe en Serra (1988a). En esta sección, se analizará el caso de los mapeos de contraste idempotentes de dos y tres estados (primitivas). En seguida, se considera los casos de dos mapeos de contraste; el primero compuesto por las primitivas apertura y cerradura sobre partición (dos estados), mientras que el segundo formado por las primitivas apertura y cerradura sobre partición y la imagen original (tres estados). Con objeto de tener un criterio de

proximidad para seleccionar las primitivas consideremos la siguiente relación.

$$\rho(x) = \frac{\varphi_{\lambda}((f, P_f))(x) - (f, P_f)(x)}{\varphi_{\lambda}((f, P_f))(x) - \gamma_{\lambda}((f, P_f))(x)} \quad (9)$$

Los valores de esta relación se encuentran entre 0 y 1. Cuando el nivel de gris de la cerradura es igual al de la imagen original el valor del criterio es igual a 0, mientras que cuando el valor del nivel de gris de la apertura es igual al de la imagen original, el criterio tiene valor 1. Bajo esta relación expresamos los mapeos de contraste de dos y tres estados como:

$$W_{\lambda, \beta}^2(f, P_f)(x) = \begin{cases} \varphi_{\lambda}(f, P_f)(x) & 0 \leq \rho(x) < \beta \\ \gamma_{\lambda}(f, P_f)(x) & \beta \leq \rho(x) \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$W_{\lambda, \beta, \alpha}^3(f, P_f)(x) = \begin{cases} \varphi_{\lambda}(f, P_f)(x) & 0 \leq \rho(x) < \beta \\ (f, P_f)(x) & \beta \leq \rho(x) < \alpha \\ \gamma_{\lambda}(f, P_f)(x) & \alpha \leq \rho(x) \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

En la Fig. 8(b) se muestra el mapeo de dos estados (ecuación (10)) usando la apertura morfológica y la cerradura morfológica como primitivas (ecuación (1)), mientras que la imagen en la Fig. 8(c) utiliza la apertura y la cerradura sobre particiones (ecuación (8)). El valor de β es igual a 1/2. Se puede observar que la calidad de la imagen de salida desde el punto de vista del contraste morfológico es mejor en aquella que utiliza transformaciones sobre particiones (Fig. 8(c)) que la que utiliza transformaciones morfológicas tradicionales (Fig. 8(b)). Puede observarse cierta degradación de la imagen en la Fig. 8(b) cuando se compara con la información de la imagen original en la Fig. 8(a). Comentarios similares pueden expresarse cuando se utiliza un mapeo de 3 estados usando las transformaciones morfológicas tradicionales en la Fig. 8(d) y cuando se usan las transformaciones sobre particiones en la Fig. 8(e). En este caso el valor de β es igual a 1/3 mientras que el valor de α es igual a 2/3. En general el valor de λ no tendría porque tener el mismo valor para la apertura y cerradura. Los tamaños de las regiones blancas o negras en una imagen, en general, son diferentes.

De la imagen mostrada en la Fig. 8(a), se calcularon los tamaños de las regiones blancas y oscuras usando aperturas y cerraduras morfológicas. La manera tradicional de estudiar los tamaños de las estructuras que constituyen la imagen es el realizar un estudio granulométrico de la misma (Serra, 1982). En la Fig. 9 se observa la curva utilizada para determinar el tamaño de λ , en este caso para la cerradura. Aunque esta curva no corresponde estrictamente a la definición de granulometría (anti-granulometría en el caso de la cerradura), la forma de la curva es similar a la obtenida por una función de densidad granulométrica. La curva en la Fig. 9 fue obtenida para cada valor λ ,

calculando la integral (volumen) sobre la imagen obtenida a partir de la diferencia aritmética entre $\varphi_{\lambda}(f)$ y $\varphi_{\lambda+1}(f)$.

La curva nos permite observar las estructuras contenidas (regiones oscuras) en la imagen del tamaño λ . Observe que la estructura principal en la imagen se encuentra aproximadamente entre valores de λ de 1 a 22. Un procedimiento similar fue realizado para el caso de la apertura. El valor λ obtenido para la apertura fue de 15, mientras que para la cerradura se seleccionó el valor 21.

Las imágenes en las Figs. 8(f) y 8(g) fueron obtenidas con mapeos de contraste de dos estados utilizando el mismo tamaño para la apertura y cerradura morfológicas. En la imagen 8(f) se utilizó el tamaño $\lambda = 15$, mientras que en la imagen de la Fig. 8(g) se utilizó $\lambda = 21$. Finalmente, en la Fig. 8(h) se utilizó el valor $\lambda = 15$ para la apertura y $\lambda = 21$ para la cerradura.

Se puede observar en la Fig. 8(h) que la selección de diferentes valores de λ , para la apertura y la cerradura, permite obtener un mejor resultado. Este procedimiento para obtener los valores de λ no puede ser utilizado de manera simple cuando la imagen es más compleja.

Otro ejemplo de un mapeo de dos estados se muestra en la Fig. 10. En este caso se buscó contrastar la imagen con un valor grande de λ . Note que en el caso del mapeo de contraste usando la apertura y la cerradura morfológica (Fig. 10(b)), la forma del elemento estructurante aparece en algunas regiones de la imagen creando nuevos contornos (ver Fig. 10(c)). Esta degradación de los contornos no aparece cuando se usan la apertura y la cerradura sobre particiones (Fig. 10(e)). Observe que el contraste de las imágenes 10(b) y 10(d) es muy similar.

4.2 Algunos Comentarios sobre los Mapeos Idempotentes de Dos y Tres Estados

En lo que se refiere a los mapeos de dos estados, se puede establecer una relación de inclusión en función del parámetro β dada por la relación siguiente:

$$\forall \beta_1, \beta_2 \text{ con } \beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow W_{\lambda, \beta_1}^2((f, P_f))(x) \leq W_{\lambda, \beta_2}^2((f, P_f))(x)$$

Esta desigualdad expresa que, en la transformación con parámetro β_2 , la cerradura (respectivamente apertura) tiene un efecto mayor (respectivamente menor) en la imagen de salida que la transformación con parámetro β_1 . De esta forma es posible obtener diferentes contrastes para un mismo valor de λ , utilizando como variable a β . En otras palabras es posible encontrar una familia de descriptores cuando se aplican mapeos de contraste de dos estados. En el caso del mapeo de tres estados, se requieren otras condiciones que forman parte de estudios actuales.

En particular, dichos estudios se enfocan a poder determinar de manera "óptima" los valores de β y α , así como del tamaño λ .

Por otra parte, es bien conocido que frecuentemente las transformaciones en morfología matemática trabajan de

manera independiente sobre la imagen (regiones blancas) y sobre el complemento (regiones oscuras) de la imagen.

Por ejemplo la apertura y la cerradura, donde la cerradura puede ser obtenida usando la apertura a partir de la dualidad con respecto al complementación, i.e. $\varphi(f) = (\gamma(f^c))^c$. En el caso de los mapeos de contraste, estos trabajan sobre los valores blancos y los valores negros de la imagen como en el caso de las transformaciones auto-duales (una transformación ψ es auto-dual si y sólo si $\psi(f) = (\psi(f^c))^c$).

Sin embargo, en el caso de los mapeos de contraste, no es posible hablar de transformaciones auto-duales. En los mapeos de contraste, los valores blancos o los valores negros de la imagen son afectados dependiendo de los intervalos dados por β y α .

Finalmente, en morfología matemática es común aplicar de manera secuencial algunas transformaciones morfológicas de acuerdo a un parámetro dado (Serra, 1988b).

Frecuentemente, este parámetro corresponde al tamaño del elemento estructurante λ . El objetivo de este tipo de transformaciones es el de tener un mejor control sobre la imagen de salida. Con el propósito de mostrar la robustez de los mapeos de contraste sobre particiones, ambos tipos de mapeos, usando la noción de píxel y la noción de zona plana, fueron aplicados de manera secuencial. Para simplificar el experimento, el valor del parámetro β se mantuvo constante. De esta forma, la siguiente transformación fue aplicada.

$$W_{\lambda_n, \beta}^2 \circ W_{\lambda_{n-1}, \beta}^2 \circ \dots \circ W_{\lambda_1, \beta}^2(f) \quad \text{con} \quad \lambda_n > \lambda_{n-1} > \dots > \lambda_1$$

En la Fig. 11 se ilustra un ejemplo. En las Figs. 11(b) y 11(c), se muestran las imágenes obtenidas aplicando respectivamente un mapeo de contraste de 2 estados a nivel píxel con $\lambda = 30$ y una secuencia de mapeos de contraste de 2 estados a nivel píxel con tamaños $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 20$, $\lambda_3 = 30$ sobre la imagen de la Fig. 11(a). El mismo experimento fue realizado utilizando la noción de zona plana. En este ejemplo se tiene el mismo resultado (Fig. 11(d)) al aplicar una secuencia de mapeos de contraste con tamaños $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 18$ o al aplicar un solo mapeo de tamaño $\lambda = 18$ sobre la imagen de la Fig. 11(a). Observe que existe cierta degradación sobre la imagen en la Fig. 11(c) la cual fue obtenida a partir de la aplicación secuencial de tres mapeos de contraste utilizando la noción de píxel, mientras que cuando se utiliza la noción de zona plana, la imagen de salida al aplicar una secuencia de mapeos es igual o muy similar a la imagen obtenida al aplicar el mapeo de contraste de tamaño $\lambda_3 = 18$. En particular observe en la imagen de la Fig. 11(c) la aparición de rasgos claros, que no existen en la imagen original, sobre rasgos oscuros y viceversa. Igualmente, se puede ver la degradación de las formas de la imagen original.

Pareciera que el hecho de no poder obtener otros resultados al aplicar de manera secuencial los mapeos de contraste sobre particiones limita la posibilidad de tener una familia más rica de operadores de contraste. Sin embargo, el poder tener dos variables, como es el caso de los mapeos de dos estados o aún más, tres variables en el caso de tres estados, nos permite tener una gran variedad de operadores

de contraste. Es claro, que conforme se aumente el número de primitivas (estados) mayor será el número de opciones.

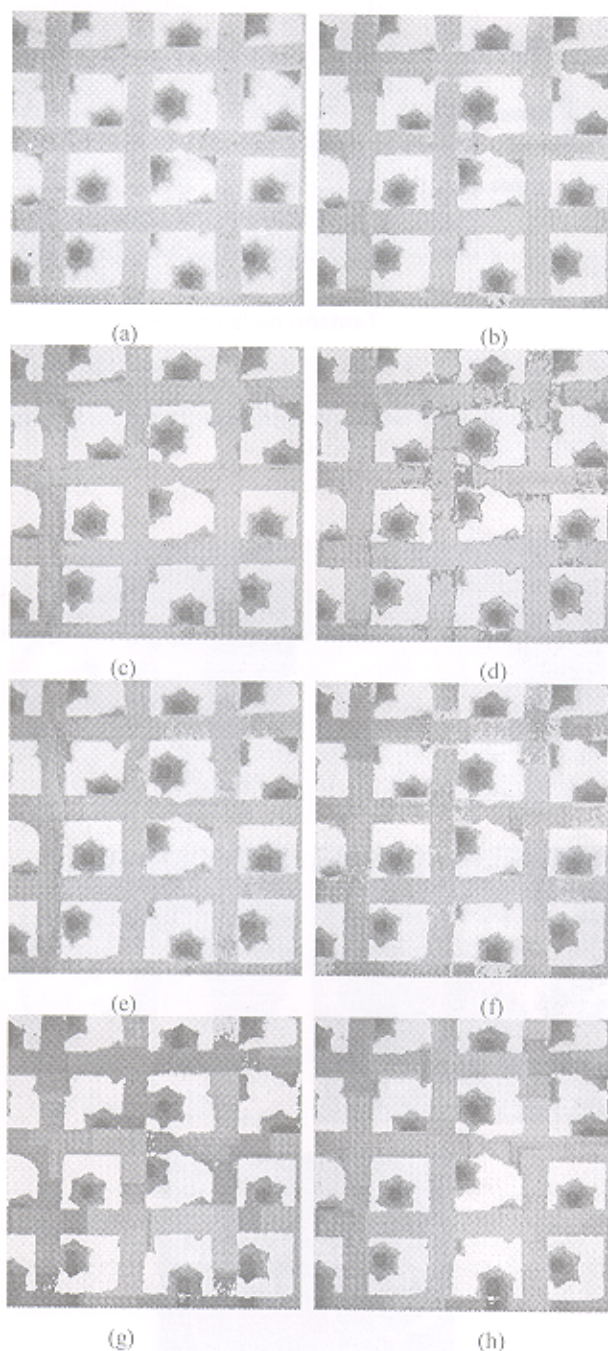


Figura 8. (a) Imagen original, (b) Mapeo de 2 estados usando la apertura y cerradura morfológicas, (c) Mapeo de 2 estados usando la apertura y la cerradura sobre particiones, (d) Mapeo de 3 estados usando la apertura y la cerradura morfológicas, (e) Mapeo de 3 estados usando la apertura y la cerradura sobre particiones, (f) Mapeo de 2 estados usando la apertura y la cerradura morfológica con $\lambda = 15$, (g) Mapeo de 2 estados usando la apertura y la cerradura morfológica con $\lambda = 21$, (h) Mapeo de 2 estados usando la apertura morfológica con $\lambda = 15$ y la cerradura morfológica con $\lambda = 21$

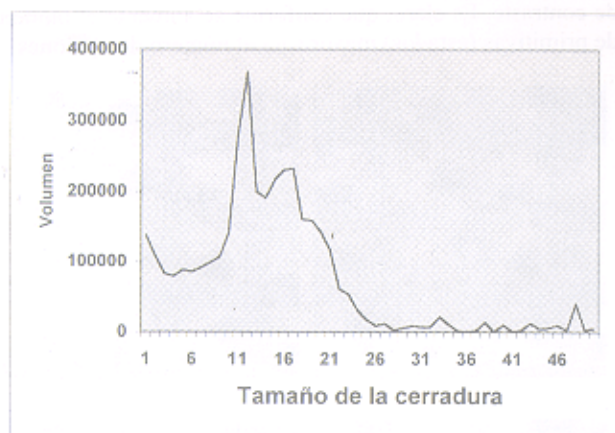


Figura 9. Curva de tamaño de estructuras; Integral (Volumen) sobre la imagen $\varphi_{\lambda}((f, P_f)) - \varphi_{\lambda,1}((f, P_f))$.

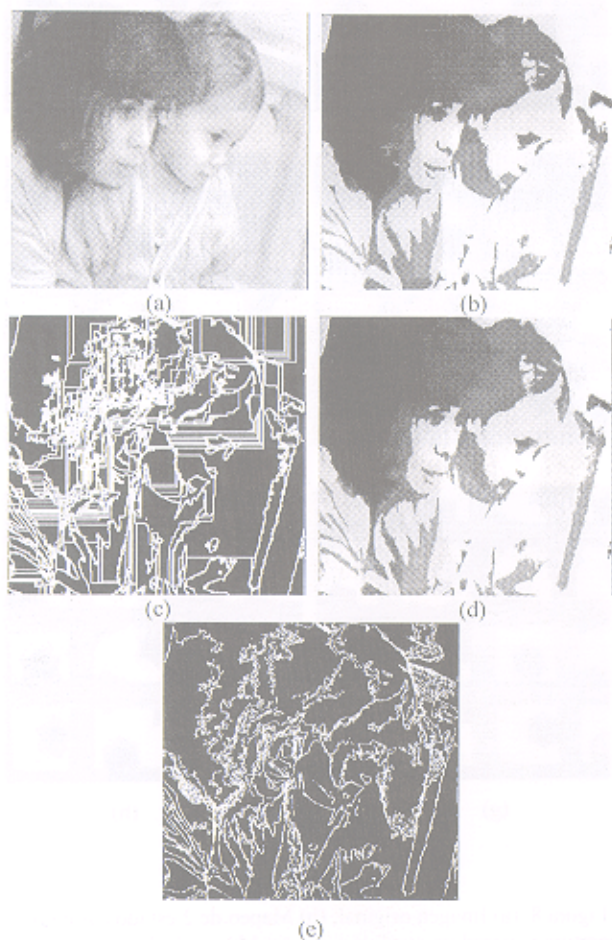


Figura 10. (a) Imagen original, (b) Mapeo de 2 estados usando la apertura y la cerradura morfológica con $\lambda = 60$ y $\beta = 1/2$, (c) Contornos de imagen (b), Mapeo de 2 estados usando la apertura y la cerradura sobre particiones con $\lambda = 20$ y $\beta = 1/2$, (e) Contornos de la imagen (d)



Figura 11. (a) Imagen original, (b) Mapeo de contraste de 2 estados a nivel píxel con $\lambda = 30$, (c) Aplicación secuencial de mapeos de contraste de 2 estados a nivel píxel con tamaños $\lambda_1=10$, $\lambda_2=20$, $\lambda_3=30$, (d) Aplicación secuencial de mapeos de contraste de 2 estados sobre partición con tamaños $\lambda_1=6$, $\lambda_2=12$, $\lambda_3=18$ (mismo resultado obtenido al aplicar el mapeo de contraste sobre particiones solamente con parámetro $\lambda=18$)

4.3 Algoritmo Modificado de Kramer y Bruckner

Considérese ahora el algoritmo de Kramer y Bruckner dado en su forma original por la expresión:

$$W_{\lambda}^{\delta \epsilon}(f)(x) = \begin{cases} \epsilon_{\lambda}(f)(x) & \text{si } f(x) - \epsilon_{\lambda}(f)(x) \leq \delta_{\lambda}(f)(x) - f(x) \\ \delta_{\lambda}(f)(x) - f(x) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (12)$$

En cada iteración, cada punto se actualiza con el máximo o mínimo valor en una ventana de $(2\lambda+1) \times (2\lambda+1)$ puntos dependiendo si el valor del dilatado o erosionado está más próximo al valor de la función original. Como se expresó en la introducción, este algoritmo presenta varios problemas en lo que se refiere a la estabilidad. En efecto, puesto que algunos cambios (contornos falsos) que aparecen en la imagen transformada pueden ser demasiado fuertes, esto puede originar la degradación de la imagen cuando se itera esta transformación. Una forma de controlar este problema es usar por separado el dilatado y el erosionado, como se describe en Terol-Villalobos(1996, 1998a, 1998b). Sin embargo, es posible también atenuar las inestabilidades en este algoritmo usando la dilatación y la erosión sobre partición. Puesto que este tipo de transformación no crea nuevos contornos (solamente elimina contornos en la imagen), es posible atenuar la degradación de la imagen

cuando la transformación es iterada. La expresión siguiente es una versión modificada del algoritmo de Kramer y Bruckner:

$$W_{\lambda}^{\delta \epsilon}((f, P_f))(x) = \begin{cases} \epsilon_{\lambda}((f, P_f))(x) & \text{si } \text{gradi}_{\lambda}(f, P_f)(x) \leq \\ & \text{grade}_{\lambda}(f, P_f)(x) \\ \delta_{\lambda}((f, P_f))(x) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

En la Fig. 12 se compara el comportamiento del algoritmo de Kramer y Bruckner con el algoritmo modificado propuesto usando la dilatación y la erosión sobre particiones. La Fig. 8(a) ilustra la imagen original. Note la degradación de la imagen cuando el algoritmo de Kramer y Bruckner es iterado. Especialmente, estas inestabilidades se pueden observar mejor en la imagen de la Fig. 12(c). Las inestabilidades son atenuadas cuando se usa la versión modificada como se ilustra en la Fig. 12(d).

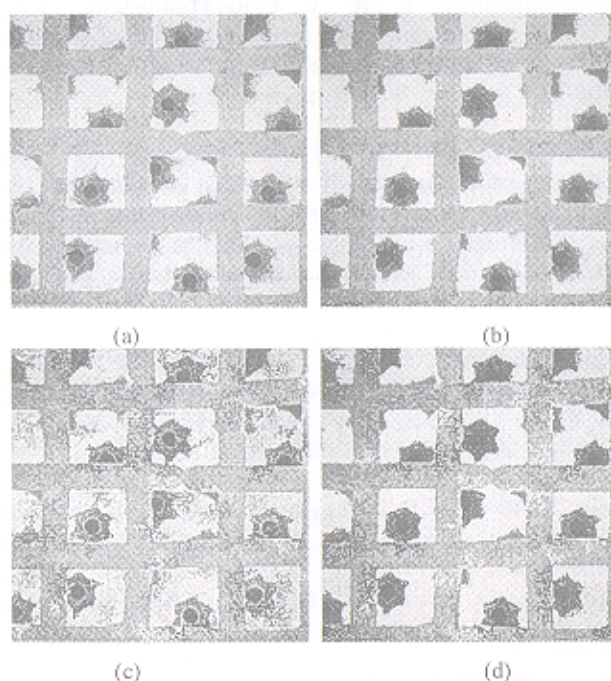


Figura 12. (a) Algoritmo de Kramer y Bruckner después de 5 iteraciones con $\lambda = 1$, (b) Algoritmo modificado de Kramer y Bruckner usando dilatación y erosión sobre partición después de 5 iteraciones, (c) Algoritmo Kramer y Bruckner después de 20 iteraciones, (d) Algoritmo modificado de Kramer y Bruckner después de 20 iteraciones

4.4 Implementación de las Transformaciones sobre Particiones: Estructura de Grafo de Adyacencia

El arreglo bidimensional (matriz de píxeles) que es la manera común de representar una imagen, no permite tratar de manera eficaz el concepto de partición basado en zonas planas, puesto que no se tiene fácilmente acceso a las regiones y a sus relaciones de vecindad. La estructura de datos que mejor se adapta a este problema es el grafo

compuesto por nodos y aristas. Donde los nodos representan las zonas planas y las aristas la adyacencia entre zonas planas. De hecho, esta estructura es útil para la descripción e implementación de una transformación conexa sobre imágenes (Potjer, 1996). A esta representación se le conoce como grafo de adyacencia de regiones.

Usando esta representación, las transformaciones conexas pueden ser obtenidas en términos de este grafo; se requiere únicamente cambiar los niveles de grises de los nodos que se fusionan. Para la realización de las transformaciones propuestas en este trabajo, se implementó un grafo cuyos vértices representan las componentes de la partición de la imagen original y las aristas describen la adyacencia entre las componentes. La Fig. 13(b) ilustra el grafo de adyacencia de la imagen en la Fig. 13(a), mientras que la Fig. 13(c) muestra la imagen obtenida a partir del cálculo de la erosión sobre el grafo.

Los valores al interior de los nodos son los niveles de grises de las zonas planas de la imagen original (Fig. 13(a)) y los niveles de grises de la imagen transformada por la erosión (Fig. 13(c)). El valor en la parte superior al interior de los nodos corresponde al valor de gris de la imagen original, mientras que el valor en la parte inferior y subrayado es el valor de gris de la imagen erosionada. Esta representación por grafo de adyacencia permite la implementación de una secuencia de transformaciones de una manera eficiente. El algoritmo para la creación del grafo es relativamente rápido. Sobre una imagen como la mostrada en la Fig. 8(a) de tamaño 256×256 (65536 píxeles) conteniendo 47225 zonas planas (nodos o vértices) se requiere de 6 segundos aproximadamente para obtener el grafo de adyacencias sobre un computador Pentium III a 600 Mhz. Después de la creación del grafo, un mapeo de contraste (ecuación (10)) de tamaño $\lambda=30$ es realizado aproximadamente en 5 segundos. Es decir, 120 operaciones básicas (erosiones o dilataciones tamaño 1) son realizadas sobre el grafo en este tiempo.

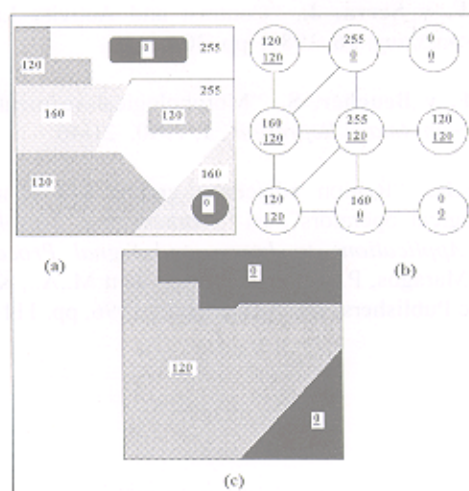


Figura 13. (a) Imagen original conteniendo 9 zonas planas, (b) Grafo de adyacencia de regiones, (c) Imagen obtenida por una erosión de tamaño 1

5 Conclusión

En este trabajo mostramos el interés en el contraste morfológico de las transformaciones morfológicas sobre particiones generadas por la noción de zona plana. Estas transformaciones conexas permiten tener un mejor control de la imagen de salida cuando un operador de contraste morfológico, construido en base a estas transformaciones, es aplicado. En particular, mostramos que, cuando operadores de contraste morfológicos no idempotentes (usando dilatación y erosión) son iterados, la degradación de la imagen de salida es atenuada considerablemente. Otra cualidad interesante de los mapeos de contraste sobre partición es que no generan nuevos contornos. Esto es en particular importante cuando se busca segmentar imágenes.

Agradecimientos

Los autores agradecen los comentarios de los revisores que permitieron mejorar la presentación de este trabajo. Jorge D. Mendiola-Santibañez agradece al CONACyT por la beca otorgada para sus estudios de doctorado. El autor Terol-Villalobos agradece a Diego R. y a Darío T.G. por la motivación en el desarrollo de este trabajo.

Referencias

Jain, A., K., *Fundamentals of Digital image Processing*, Vol. I, Prentice Hall Information International, USA, 1989.

Kramer, H., P. y Bruckner, J.B., "Iteration of non-linear transformation for enhancement of digital image", *Pattern Recognition*, 7, 1975, 53-58.

Heijmans, H.J.A.M., "Connected morphological operators for binary images", Reporte Técnico PNA-R9708, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1997, Holanda.

Meyer, F. y Serra, J., "Contrast and Activity Lattice" *Signal Processing*, 16, 1989, pp. 303-317.

Meyer, F. y Beucher, S., "Morphological segmentation" *J. Vis. Comm. Image Represent.*, 1, 1990, 21-46.

Potjer F.K., "Region adjacency graphs and connected morphological operators", en *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, Editores Maragos, P., Schafer, R.,W., Butt M.,A., Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1996, pp. 111-118.

Salembier, Ph., "Multi-criterion segmentation for image processing" *Workshop on Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, Editores Serra, J., Salembier, Ph., Barcelona, 1993, pp. 40-45.

Serra, J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Editor J. Serra., Vol. I, Academic Press, New York, 1982.

Serra, J., "Toggle Mappings" *Technical report N-18/88/MM*, Centre de Morphologie Mathématique, ENSMP, 1988a, Fontainebleau, France.

Serra, J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Editor J. Serra., Vol. II, Academic, New York, 1988b.

Terol-Villalobos, I. R., "Nonincreasing filters using morphological gradient criteria", *Optical Engineering*, 35, 1996, pp. 3172-3182.

Terol-Villalobos, I. R. y Cruz-Mandujano, J.A., "Contrast enhancement and image segmentation using a class of morphological nonincreasing filters", *Journal of Electronic Imaging*, 7, 1998, pp. 641-654.

Terol-Villalobos, I. R., "Toggle mappings and some related transformations: A study of contrast enhancement", en *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, Editores H.J.A.M. Heijmans and J.B.T.M. Roerdink, Kluwer Academic Publishers, Holanda, 1998, pp. 11-18.

Terol-Villalobos, I.R., "Morphological Image Enhancement and Segmentation", en *Advances in Imaging and Electron Physics*, Editor Peter W. Hawkes, Vol. 118, capítulo 4, Academic Press, 2001, pp. 207-273.

Terol-Villalobos, I.R. y Vargas-Vázquez, D., "A Study of Openings and Closings with Reconstruction Criteria", en *Mathematical Morphology*, Editores Hugues Talbot, Richard Beare, capítulo 4, Editorial CSIRO, Melbourne Australia, 2002, pp. 413-423.

Vincent, L., "Mathematical morphology on graphs", *Signal Processing*, 16, 1989, pp.365-388.



Jorge D. Mendiola Santibañez, obtuvo el título de Ingeniería de la Universidad Benemérita de Puebla y el grado de Maestro en Ciencias en el INAOE. Actualmente realiza sus estudios de Doctorado en la Universidad Autónoma de Querétaro. Sus principales temas de investigación se enfocan al procesamiento de imágenes y sus aplicaciones en imágenes en medicina.



Iván R. Terol Villalobos, obtuvo su título de Ingeniería en el Instituto Politécnico Nacional (México), su grado de Maestro en Ciencias en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N. (México). Su grado de Doctor en Ciencias lo obtuvo en el Centro de Morfología Matemática, de la Escuela Nacional Superior de Minas de Paris (Francia). Actualmente es investigador titular del CIDETEQ (Querétaro, México). Sus principales temas de investigación se enfocan al procesamiento morfológico de imágenes, modelos probabilísticos en morfología matemática y a la visión por computadora.

