Algoritmo para Aproximar el Área Bajo la Curva de la Función Normal Estándar

M. en C. Víctor Manuel Silva García,
M. en C. Eduardo Vega Alvarado,
Profesores del CIDETEC-IPN
Ing. Salvador Pérez Cárdenas,
Ing. Miguel Ángel Jiménez Cruz.
Profesores de ESIQUIE-IPN.

La función normal definida como

$$f(x) = \left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)\sigma}\right) e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$$

para $-\infty < x < \infty$, es una de las funciones más estudiadas en la teoría de la probabilidad, con importantes aplicaciones en la estadística. Prácticamente todos los libros que abordan las ramas de probabilidad o estadística tienen como apéndice una tabla, en la cual aparecen los valores de la integral definida de la función normal para un caso particular, a saber, para u=0 y σ=1. Sin embargo, normalmente en ninguno de estos libros se explica la manera de cómo se obtienen los valores de la tabla; es claro que el área bajo la curva se puede aproximar utilizando las sumas de Riemann, pero este proceso puede ser inexacto para algunos casos. El presente trabajo propone otra forma de cálculo, cuya aproximación tiene un error que oscila entre las cotas $-2.5*10^{-14}$ y $4.16 * 10^{-14}$ para cada intervalo de longitud 0.01.

El descubrimiento de la función normal se debe al matemático alemán Carl Friedrich Gauss, a quién también se debe la demostración del teorema fundamental del álgebra, que afirma que todo polinomio de constantes complejas tiene al menos una raíz. Gauss demostró este importante teorema de cuatro formas diferentes a lo largo de su vida.

PROCEDIMIENTO

Se partirá del hecho de que sí $f^{(4)}(x)$ es continua en el intervalo [a,b], entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

... **[1]**

para un cierto c ε [a,b]

La estrategia para demostrar esta igualdad se encuentra en la sección de problemas del capítulo 18 del libro *Calculus* de Spivak, M., Ed. Reverte, 1992. Cabe mencionar que el teorema de Rolle y la definición de la función *F(t)= Q1(x)[f(t)-Q(t)]+Q1(t)[f(x)-Q(x)]* juegan un papel importante en la demostración.

Aquí

$$Q_1(x) = (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$$

y

$$Q(x) = P(x) + A(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)$$

Con A igual a una constante, *P(x)* es un polinomio de grado 2 con la siguiente característica: *P(a)=f(a)*,

$$P(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2}) \quad \text{y}$$

La función que se sustituirá en la expresión 1 es :

para $-\infty < x < \infty$, la cual se denomina función normal estándar. La cuarta derivada de la función normal estándar es continua en cualquier intervalo [a,b] en los números reales. Esto se debe básicamente a que la cuarta derivada se puede expresar como el producto de *f(x)*P1(x)*, en donde *P1(x)* es un polinomio de grado cuatro.

Si se aplica la fórmula de derivación a

$$f(x) = \left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

de manera sucesiva, es sencillo encontrar que:

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^4 - 6x^2 + 3)$$

Ahora se buscarán las cotas para la función $f^{(4)}(x)$con x ε [a,b] y así conocer aproximadamente el valor de

$$\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

Antes de seguir adelante es conveniente mencionar que, en general, en las tablas donde se proporcionan los valores de la integral definida de la normal estándar, se considera al intervalo [a,b] como [0,3], el cual a su vez se divide en subintervalos de longitud 0.01.

En este orden de ideas se analizará la función $f^{(4)}(x)$ en dicho intervalo, con el fin de averiguar los valores máximo y mínimo de $f^{(4)}(x)$ con x ε [a,b].

Para esto se deben considerar tres aspectos, a saber:

1. Los puntos singulares de $f^{(4)}(x)$ en (0,3).
2. $f^{(4)}(0)$ y $f^{(4)}(3)$.
3. Los puntos de x e [0,3] tales que $f^{(4)}(x)$ no es derivable.

Dado que la función $f^{(4)}(x)$ es derivable en todo el intervalo [0,3], entonces se descarta el último punto. Para localizar los puntos singulares de $f^{(4)}(x)$ en [0,3], se toma como base la igualdad $f^{(5)}(x)=0$. A partir de ella se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x^5 + 10x^3 - 15x) = 0 \qquad \text{... [2]}$$

Dado que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \qquad \text{para todo x ε R}$$

La expresión 2 se puede escribir como:

$$x^5 - 10x^3 + 15x = 0 \qquad \text{... [3]}$$

Utilizando [3] se pueden calcular todos los puntos singulares de $f^{(4)}(x)$, siendo estos:

$$x_{10} = 0,\ x_{11} = \sqrt{\frac{10+\sqrt{40}}{2}},\ x_{12} = -\sqrt{\frac{10+\sqrt{40}}{2}}$$

$$x_{21} = \sqrt{\frac{10-\sqrt{40}}{2}} \quad \text{y} \quad x_{22} = -\sqrt{\frac{10-\sqrt{40}}{2}}$$

Sin embargo, dado que el intervalo de interés es (0,3), se tomará en cuenta únicamente:

$$x_{11} \cong 2.857 \quad \text{y} \quad x_{21} \cong 1.355$$

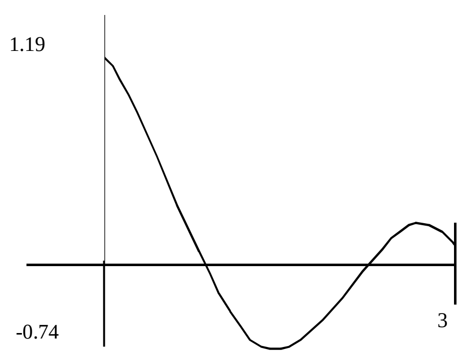
Entonces, los puntos de interés son: $f^{(4)}(0)$, $f^{(4)}(1.355)$, $f^{(4)}(2.857)$ y $f^{(4)}(3)$.

Es simple observar que el valor máximo de $f^{(4)}(x)$ lo toma en x=0 y el mínimo en x=1.355, lo que conduce a las cotas siguientes:

$$-2.5(10^{-14}) \le \frac{(0.01)^5 f(c)}{2880} \le 4.16(10^{-14})$$

A continuación se presenta la gráfica de la función

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^4 - 6x^2 + 3) \quad \text{para x ε [0,3]}$$



Las cotas que se muestran en la expresión, son válidas para cada uno de los subintervalos de longitud 0.01, que se forman a partir del intervalo [0,3]. De aquí se puede concluir para fines prácticos que:

$$\frac{(0.01)^5 f(c)}{2880} \cong 0$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta la conclusión anterior, y se divide el intervalo [0,3] en 300 subintervalos de longitud 0.01, entonces el área bajo la curva se puede aproximar de la siguiente manera:

$$\int_0^3 f(x)dx \cong$$

$$\left[\sum_{i=1}^{300} e^{-\frac{[(i-1)(0.01)]^2}{2}} + 4e^{-\frac{[(i-1/2)(0.01)]^2}{2}} + e^{-\frac{[(i(0.01)]^2}{2}}\right]$$

multiplicado por $\frac{0.01}{6\sqrt{2\pi}}$

A continuación se presenta un programa en lenguaje Fortran 90/95 para aproximar el área bajo la curva en [0,3].

```
PROGRAM Tabla_Normal

!Propósito: Calcular los valores del área bajo la curva normal,&
!en el intervalo [0,3].

IMPLICIT NONE
REAL :  : C
CHARACTER (1en=30) Archivo_de_Salida
INTEGER : : Estado
REAL, DIMENSION (0 : 309)  : : A=0.
INTEGER : : i
REAL, PARAMETER : : RAIZ_DO_PI=2.506606, INC=0.01
C= (INC)/(6*RAIZ_DO_PI)


DO i=1,309
   A(i)=(exp((-0.5)*(((REAL(i)-1.)*(INC))**2))+
           4*exp((& -0.5)*(((REAL(i)-0.5)* (INC))**2))+
           exp((-0.5) & *(((REAL(i))*(INC))**2)))*C+A(i-1)
END DO
WRITE(*,*)´DAME NOMBRE DE Archivo_de_Salida´
READ(*,´(A30)´)Archivo_de_Salida
OPEN(20,FILE=Archivo_de_Salida,STATUS=´NEW´,
        AC& TION=´WRITE´, IOSTAT=Estado)
WRITE (20,100) (A(i), i=0,309)
100FORMAT (10(1x,F7.4))
END  PROGRAM
```

CONCLUSIONES

* Si se compara el método propuesto con el método de Riemann, para situaciones similares (tres sumandos por intervalo), se observa que el método de Riemann puede tener fallas en el tercer decimal (**tabla1**).

* Con el método propuesto se pueden obtener resultados confiables, hasta del orden de 10^{-11}. De hecho, se realizó el cálculo de una tabla con cinco decimales (**tabla2**).

* Una aplicación de este procedimiento es de utilidad para los alumnos del área de ingeniería o del área de ciencias, ya que es importante que ellos puedan obtener su tabla de la función normal estándar de manera confiable.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Stephen Chapman, *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. Editorial Mc Graw Hill.

[2] John E. Freud, Ronald E. Walpole, *Estadística Matemática*, Editorial Prentice Hall.

[3] Michael Spivak, *Calculus*, Editorial Reverté.

[4] D. Struik , *Historia Concisa de las Matemáticas*. Instituto Politécnico Nacional.

AREA BAJO LA CURVA DE LA NORMAL ESTANDAR
MÈTODO PROPUESTO

X	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3079	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4430	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4485	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4700	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4762	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4865	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4980	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

AREA BAJO LA CURVA DE LA NORMAL ESTANDAR
MÈTODO DE RIEMANN

X	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0792	0.0832	0.0871	0.0909	0.0948	0.0987	0.1025	0.1064	0.1102	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1330	0.1368	0.1405	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1590	0.1627	0.1663	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1843	0.1879
0.5	0.1914	0.1949	0.1984	0.2019	0.2053	0.2088	0.2122	0.2156	0.2189	0.2223
0.6	0.2256	0.2290	0.2323	0.2355	0.2388	0.2420	0.2452	0.2484	0.2516	0.2548
0.7	0.2579	0.2610	0.2641	0.2672	0.2702	0.2732	0.2762	0.2792	0.2821	0.2851
0.8	0.2880	0.2908	0.2937	0.2965	0.2994	0.3021	0.3049	0.3076	0.3104	0.3131
0.9	0.3157	0.3184	0.3210	0.3236	0.3262	0.3287	0.3312	0.3337	0.3362	0.3387
1.0	0.3411	0.3435	0.3459	0.3482	0.3506	0.3529	0.3551	0.3574	0.3596	0.3619
1.1	0.3640	0.3662	0.3683	0.3705	0.3725	0.3746	0.3767	0.3787	0.3807	0.3826
1.2	0.3846	0.3865	0.3884	0.3903	0.3922	0.3940	0.3958	0.3976	0.3994	0.4011
1.3	0.4028	0.4045	0.4062	0.4079	0.4095	0.4111	0.4127	0.4143	0.4158	0.4173
1.4	0.4188	0.4203	0.4218	0.4232	0.4246	0.4260	0.4274	0.4288	0.4301	0.4314
1.5	0.4327	0.4340	0.4353	0.4365	0.4378	0.4390	0.4402	0.4413	0.4425	0.4436
1.6	0.4447	0.4458	0.4469	0.4480	0.4490	0.4500	0.4510	0.4520	0.4530	0.4540
1.7	0.4549	0.4559	0.4568	0.4577	0.4586	0.4594	0.4603	0.4611	0.4619	0.4627
1.8	0.4635	0.4643	0.4651	0.4658	0.4666	0.4673	0.4680	0.4687	0.4694	0.4701
1.9	0.4707	0.4714	0.4720	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761
2.0	0.4767	0.4772	0.4777	0.4782	0.4787	0.4792	0.4797	0.4802	0.4807	0.4811
2.1	0.4815	0.4820	0.4824	0.4828	0.4832	0.4836	0.4840	0.4844	0.4848	0.4851
2.2	0.4855	0.4858	0.4862	0.4865	0.4868	0.4872	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884
2.3	0.4887	0.4889	0.4892	0.4895	0.4897	0.4900	0.4902	0.4905	0.4907	0.4910
2.4	0.4912	0.4914	0.4916	0.4918	0.4920	0.4922	0.4924	0.4926	0.4928	0.4930
2.5	0.4932	0.4933	0.4935	0.4937	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4944	0.4946
2.6	0.4947	0.4948	0.4950	0.4951	0.4952	0.4953	0.4954	0.4956	0.4957	0.4958
2.7	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964	0.4965	0.4965	0.4966	0.4967
2.8	0.4968	0.4969	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4972	0.4973	0.4974	0.4974
2.9	0.4975	0.4975	0.4976	0.4976	0.4977	0.4978	0.4978	0.4979	0.4979	0.4979
3.0	0.4980	0.4980	0.4981	0.4981	0.4982	0.4982	0.4982	0.4983	0.4983	0.4983

Tabla 1

ÀREA BAJO LA CURVA DE LA NORMAL ESTANDAR
CINCO CIFRAS DECIMALES

X	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06750	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08707	0.09095	0.09484	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17365	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19498	0.19847	0.20195	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22241
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23892	0.24216	0.24538	0.24857	0.25175	0.25491
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26731	0.27035	0.27338	0.27638	0.27935	0.28231	0.28524
0.8	0.28815	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32122	0.32382	0.32639	0.32895	0.33148	0.33398	0.33646	0.33892
1.0	0.34135	0.34376	0.34614	0.34850	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36215
1.1	0.36434	0.36650	0.36865	0.37077	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39252	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40148
1.3	0.40320	0.40491	0.40659	0.40824	0.40988	0.41150	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41925	0.42073	0.42220	0.42365	0.42507	0.42647	0.42786	0.42922	0.43057	0.43189
1.5	0.43320	0.43448	0.43575	0.43700	0.43822	0.43943	0.44062	0.44180	0.44295	0.44409
1.6	0.44520	0.44630	0.44739	0.44845	0.44950	0.45053	0.45155	0.45254	0.45353	0.45449
1.7	0.45544	0.45637	0.45729	0.45819	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46247	0.46328
1.8	0.46407	0.46486	0.46562	0.46638	0.46712	0.46785	0.46856	0.46926	0.46995	0.47063
1.9	0.47129	0.47194	0.47258	0.47320	0.47381	0.47442	0.47501	0.47558	0.47615	0.47671
2.0	0.47725	0.47779	0.47831	0.47883	0.47933	0.47982	0.48030	0.48078	0.48124	0.48170
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48342	0.48383	0.48423	0.48462	0.48500	0.48538	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48746	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49062	0.49087	0.49111	0.49135	0.49158
2.4	0.49181	0.49203	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49306	0.49325	0.49344	0.49362
2.5	0.49379	0.49397	0.49414	0.49430	0.49446	0.49462	0.49477	0.49492	0.49506	0.49521
2.6	0.49534	0.49548	0.49561	0.49574	0.49586	0.49598	0.49610	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49654	0.49664	0.49674	0.49684	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49729	0.49737
2.8	0.49745	0.49753	0.49760	0.49768	0.49775	0.49782	0.49789	0.49795	0.49802	0.49808
2.9	0.49814	0.49820	0.49825	0.49831	0.49836	0.49842	0.49847	0.49852	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49870	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49890	0.49893	0.49897	0.49900

Tabla 2