

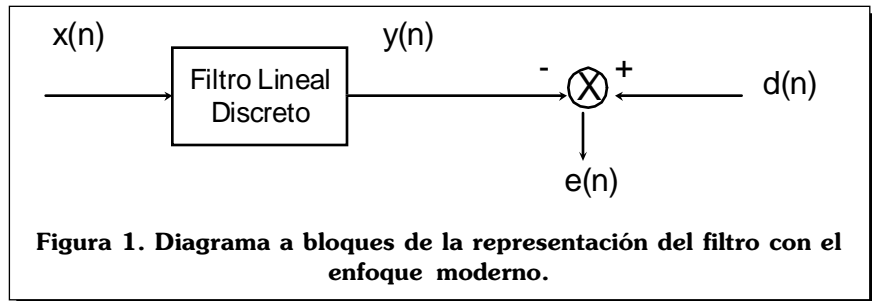
# Filtros Wiener

**Ing. Aquilino Cervantes Avila**  
 Alumno de la Maestría del CIC-IPN.

**U**n problema clásico en la Ingeniería Electrónica, es el diseño de filtros como una pieza de circuitería o programación, cuyo objetivo es el reducir los efectos de ruido aditivo en una señal; de esta manera se pueden distinguir dos criterios: el clásico, en donde para establecer el diseño del filtro se necesita conocimiento respecto a los contenidos en frecuencia de la señal deseada y del ruido aditivo (ejemplos de este enfoque incluyen los filtros Butterworth y Chebyshev), y el enfoque moderno, donde tanto las señales de ruido como la señal útil son vistos como procesos estocásticos y se emplea el análisis estadístico de las señales para definir las características del filtro. Tomando el enfoque moderno, existe una gran cantidad de algoritmos que permiten estimar una señal en presencia de ruido; de esta manera se tienen los métodos de la maximización de la relación Señal-Ruido (snr), de la máxima Entropía, del máximo Likelihood, del error cuadrático mínimo, ..., etc. Esto, sin considerar además la solución adaptativa, con lo que el número de algoritmos se incrementa.

## Filtros Wiener

Para iniciar esta discusión, considere la **figura 1**.



**Figura 1. Diagrama a bloques de la representación del filtro con el enfoque moderno.**

Se observa que la serie  $x(n)$  representa la entrada al filtro,  $y(n)$  la salida del filtro,  $d(n)$  la respuesta deseada y  $e(n)$  el error entre la señal deseada y la señal obtenida del filtro. De esta manera, el requerimiento es ajustar  $y(n)$  de tal forma que  $e(n)$  sea el mínimo posible.

Tomando las siguientes restricciones:

- 1.- El filtro es lineal, discreto y causal,
- 2.- La respuesta impulso del filtro es finita,

se obtienen las siguientes ventajas:

- al ser lineal el tratamiento matemático resulta más sencillo,
- el que sea discreto, significa que el filtro puede ser implantado en hardware digital,
- la condición de causalidad implica un inicio del sistema a partir de cero, y ...

- la segunda restricción hace al filtro inherentemente estable.

Considerando esto,  $y(n)$  puede modelarse como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\alpha} g_k x(n-k) \quad \dots\dots\dots(1)$$

siendo  $g_k$  la respuesta impulso del filtro que se esta proponiendo.

A partir de la **figura 1**, se observa que :

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad \dots\dots\dots(2)$$

Ahora, se propone minimizar  $J$ , donde  $J$  puede ser:

- a)  $J = |e|$
- b)  $J = e^2$
- c)  $J = E[e^2]$

donde  $e$  = error y  $E$  el operador matemático esperanza.

Para tomar una decisión debe recordarse que se trata con procesos estocásticos o aleatorios en donde

resulta más ventajoso tomar la tercera opción, ya que esta involucra la probabilidad de la señal.

Ahora, suponiendo valores complejos :

$$J = E [e(n)e^*(n)] \dots\dots\dots(3)$$

$$g_k = a_k + j b_k \dots\dots\dots(4)$$

donde el asterisco denota al complejo conjugado y «a, b» son la parte real e imaginaria de la respuesta impulso del filtro.

Definiendo un gradiente para el k-avo coeficiente del filtro, en función de las partes real e imaginaria, se tiene :

$$\nabla_k = \partial/\partial a_k + j \partial/\partial b_k \quad \text{Para } k = 0,1,2,\dots \dots\dots(5)$$

Aplicando este gradiente a la función de costo J :

$$\nabla_k = \partial J/\partial a_k + j \partial J/\partial b_k \quad \text{Para } k = 0,1,2,\dots \dots\dots(6)$$

Para que J se fije en su valor mínimo se necesita que  $\nabla_k = 0$  para  $k = 0,1,2,\dots$  Bajo estas condiciones se dice que el filtro es óptimo en el sentido del error cuadrático medio.

$$\nabla_k = E[e^*(n) \partial e(n)/\partial a_k + e(n) \partial e^*(n)/\partial a_k + j e^*(n) \partial e(n)/\partial b_k + j e(n) \partial e^*(n)/\partial b_k] \dots\dots\dots(7)$$

Resolviendo la ecuación (7) por medio de las ecuaciones (2) y (3) se tiene :

$$\nabla_k = -2E[x(n-k) e^*(n)] \dots\dots\dots(8)$$

e igualando a cero para obtener la optimización requerida :

$$E[x(n-k) e^*(n)] = 0 \quad \text{Para } k = 0,1,2,\dots \dots\dots(9)$$

La ecuación (9) puede expresarse como sigue « La condición necesaria y suficiente para que la función de costo J sea atada a su mínimo, es que el correspondiente valor de la estimación del error e(n) sea ortogonal a cada muestra que ingresa para la estimación de la respuesta deseada en el tiempo n» (lo cual constituye el principio de ortogonalidad).

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (1) y (2) en la ecuación (9) se tiene:

$$E [ x(n - k) ( d^*(n) - \sum_{j=0}^a g_j x^*(n-j) ) ] = 0$$

Para  $k = 0,1,2,\dots \dots\dots(10)$

expandiendo y reorganizando términos :

$$\sum_{j=0}^a g_j E [ x(n-k) x^*(n-i) ] = E[x(n-k)d^*(n)]$$

Para  $k = 0,1,2,\dots \dots\dots(11)$

donde los términos esperanza pueden ser interpretados como:

1.- El termino  $E [ x(n-k) x^*(n-i) ]$  es igual a la función de autocorrelación de la entrada del filtro para un desplazamiento i-k.

$$r(i-k) = E[x(n-k)x^*(n-i)] \dots\dots\dots(12)$$

2.- El termino  $E(x(n-k)d^*(n))$  es igual a la correlación cruzada entre la entrada del filtro y la respuesta deseada para un desplazamiento -k.

$$p(-k) = E[x(n-k)d^*(n)] \dots\dots\dots(13)$$

Utilizando las ecuaciones (12) y (13) se puede escribir :

$$\sum_{j=0}^a g_j r(i-k) = p(-k) \quad \text{Para } k = 0,1,2,\dots \dots\dots(14)$$

Esta es conocida como ecuación de WIENER-HOPF e involucra dos correlaciones, la función de autocorrelación de la entrada y la correlación cruzada entre la entrada y la salida deseada. Los elementos  $g_j$  son los coeficientes del filtro óptimo, que normalmente son la incógnita en esta ecuación.

Ahora, tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (14) y resolviendo para G.

$$G(\omega) = S_{xd} S_{xx}^{-1} \dots\dots\dots(15)$$

donde  $S_{xd}$  indica la densidad espectral de potencia (PSD) entre la señal deseada y la entrada del filtro, y  $S_{xx}$  indica la PSD de la señal de entrada.

Suponiendo que la señal de entrada se modela linealmente como una estimación estacionaria de la señal deseada más una porción de ruido no correlacionada con dicha señal, de la forma :

$$x(n) = \sum_{k=0} h_k d(n-k) + \eta(n) \dots\dots\dots(16)$$

en donde h(n) representa la señal de ruido aditivo con densidad espectral de potencia  $S_{\eta}$ , entonces :

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_d(\omega) + S_{\eta} \dots\dots\dots(17)$$

$$S_{xd}(\omega) = H^*(\omega)S_d(\omega) \dots\dots\dots(18)$$

Siendo  $S_d(\omega)$  la densidad espectral de potencia de la señal deseada. Sustituyendo (17) y (18) en (15) se obtiene :

$$G(\omega) = \frac{H^*(\omega)S_d(\omega)}{|H(\omega)|^2 S_d(\omega) + S_{\eta}} \dots\dots\dots(19)$$

Esta ecuación es conocida como filtro FOURIER-WIENER, el cual está completamente determinado por el espectro de potencia de la señal deseada  $S_d(\omega)$ , el modelo del tipo de ruido aditivo que contamina la señal y el tipo de distorsión que posee la imagen.

Ahora, suponiendo que no existe alguna distorsión en la señal deseada,  $H=1$  y

$$G(\omega) = \frac{S_d(\omega)}{S_d(\omega) + S_{\eta\eta}} \dots\dots\dots(20)$$

la cual puede ser reescrita como:

$$G(\omega) = \frac{S_{nr}(\omega)}{S_{nr}(\omega) + 1} \dots\dots\dots(21)$$

donde:

$$Snr(\omega) = S_d(\omega)/S_{\eta\eta}$$

e igual a la relación señal ruido (SNR) para la frecuencia  $\omega$ .

La ecuación (21) es conocida como filtro PLANO. De la misma ecuación (21) se observa que en caso de que la relación señal-ruido (SNR) sea pequeña los coeficientes  $G$  se encontrarán muy cerca de la unidad, pero en el caso de que el SNR sea grande, los coeficientes serán equivalentes al SNR. Por tanto el filtro Wiener en ausencia de distorsión evalúa una compensación de acuerdo a la relación señal ruido.

Para el caso de ausencia de ruido  $S_{\eta\eta}$  es igual a cero.

$$G(\omega) = \frac{H^*(\omega)S_d(\omega)}{|H(\omega)|^2 S_d(\omega)} = \frac{1}{H} \dots\dots\dots(22)$$

Esta ecuación se conoce como filtro inverso.

De forma general puede verse que la obtención del filtro WIENER depende de la cantidad de información que se tenga respecto de la señal que se espera, así como del tipo de ruido y distorsión que la afecta; debido a esto su uso se encuentra limitado para aquellos casos en los que se conozcan estas estadísticas.

**Aplicación al Procesamiento de Imágenes**

Ahora, para aplicar este tipo de filtrado a imágenes, debe considerarse la versión bidimensional del filtro, entonces :

$$S_{xx}(\omega_1, \omega_2) = |H(\omega_1, \omega_2)|^2 S_d(\omega_1, \omega_2) + S_{\eta\eta} \dots\dots\dots(23)$$

$$S_{xd}(\omega_1, \omega_2) = H^*(\omega_1, \omega_2) S_d(\omega_1, \omega_2) \dots\dots\dots(24)$$

y por tanto :

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{H^*(\omega_1, \omega_2) S_d(\omega_1, \omega_2)}{|H(\omega_1, \omega_2)|^2 S_d(\omega_1, \omega_2) + S_{\eta\eta}} \dots\dots\dots(25)$$

Usualmente, para imágenes la SNR es grande en frecuencias bajas, por lo que un filtro Wiener implementa un filtro pasabajos. Sin embargo, en ausencia de ruido, la función de transferencia de la distorsión normalmente es un proceso de filtrado pasabajos, en cuyo caso el filtro Wiener se convierte en un filtro pasaltos.

Cuando existe en la imagen tanto ruido como distorsión el filtro Wiener implanta un filtro pasabanda.

En caso de que no se posea toda la información requerida para la implantación del filtro Wiener, (imagen deseada, ruido y distorsión que afecta a la imagen) como sucede en muchas aplicaciones, una posible solución es obtener la función de transferencia de la distorsión a partir de la observación de la imagen; el nivel medio de ruido también puede estimarse a partir de las partes de alta frecuencia de la imagen observada, donde se supone que la imagen es negligible y por último, la densidad espectral de potencia de la imagen deseada puede calcularse mediante la fórmula (26).

$$S_d^-(\omega_1, \omega_2) = \frac{S_{xx}(\omega_1, \omega_2) - S_{\eta\eta}^-}{|H^-(\omega_1, \omega_2)|^2} \dots\dots\dots(26)$$

Siendo  $S_{xx}(\omega_1, \omega_2)$  la densidad espectral de potencia (PSD) de la imagen observada,  $S_{\eta\eta}^-$  es la estimación de la PSD del ruido aditivo,  $H^-(\omega_1, \omega_2)$  es la estimación de la función de transferencia de la distorsión que afecta a la imagen y  $S_d^-(\omega_1, \omega_2)$  es la estimación de la PSD de la imagen deseada.

En la implantación de la fórmula (26) por medio de un programa debe tenerse cuidado en que la función de distorsión  $H$  no se sea cero ni se aproxime demasiado a él, esto para evitar divisiones entre cero y números demasiado grandes en la densidad espectral de potencia de la imagen deseada.

**NOTA:** Lógicamente, las habilidades del filtro Wiener dependerán de forma directa de que tan exactas sean las estimaciones discutidas.

**Obtención de los coeficientes del Filtro WIENER.**

A partir de la discusión matemática, el diseño del filtro Wiener puede darse de diversas maneras, dependiendo de los datos que se encuentren disponibles. Para el desarrollo de este trabajo se tomaron imágenes a través de Internet y del Centro Meteorológico Nacional; entonces, para un caso se tienen imágenes prácticamente libres de ruido y para el otro, imágenes con una gran cantidad de ruido, contando en ambos tipos de imágenes con distorsión mínima o nula.

Considerando el primer tipo de imágenes, para probar el efecto del filtro se desarrollaron generadores de ruido y distorsión para contaminar las imágenes; de esta manera, la imagen original puede modelarse como la imagen deseada, mientras que la imagen corrupta con ruido o distorsión se modela como la imagen observada. Por otra parte, para las imágenes obtenidas vía satélite se utilizaron los conceptos que derivaron la ecuación (26) para obtener un modelo de la señal deseada.

Tomando la ecuación (25) como referencia, es necesario obtener la densidad espectral de potencia (PSD) de la imagen deseada, la PSD del ruido aditivo y la función de transferencia de la distorsión de la imagen.

La densidad espectral de potencia puede obtenerse por medio de los métodos clásicos en base a la transformada de Fourier o por métodos modernos basados en modelos lineales.

Tomando los primeros, se tiene que la PSD se define como la transformada de Fourier de la función de correlación, operación también conocida como periodograma, por lo

que la función de correlación bidimensional se obtiene por medio de la fórmula:

$$R_{xy}(m_1, m_2) = \sum_{N_1=0}^{N_1-1} \sum_{N_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) y(n_1+m_1, n_2+m_2) \dots\dots\dots(27)$$

De la ecuación (27) podemos observar que la función de correlación puede tomarse como una convolución de  $y(n_1, n_2)$  con  $x(-n_1, -n_2)$ , entonces, si ambas secuencias son reales es relativamente fácil demostrar que la correlación es equivalente en el dominio de la frecuencia a:

$$P_{xy}(k_1, k_2) = X^*(k_1, k_2) Y(k_1, k_2) \dots\dots\dots(28)$$

**NOTA:** La ecuación (28) también puede usarse para el cálculo de autocorrelación en el caso que  $X = Y$ .

Esta derivación muestra que la función de correlación y autocorrelación se puede calcular como una convolución circular por medio de la transformada de Fourier bidimensional en la forma :

$$R_{xy}(m_1, m_2) = \text{IDFT} \{ \text{DFT} * [x(n_1, n_2)] \text{DFT} [y(n_1, n_2)] \} \dots\dots\dots(29)$$

Una vez con la función de correlación, el paso siguiente es obtener la estimación de la PSD de la imagen, lo cual puede calcularse de varias maneras, siendo en el estilo clásico las técnicas de: periodograma, estimación de Bartlett, estimación de Welch y estimación de Blackman-Tukey; de estos se elige el último debido a sus efectos de aplanado de la señal. Básicamente, el método de Blackman-Tukey consiste en aplicar una ventana triangular a la función de correlación antes de aplicarle la transformada de Fourier.

Para efectos de comparación se modelaron las ventanas de Hamming, Hanning, Bartlett, Blackman y Blackman-Harris en su versión bidimensional, con los métodos de periodograma y estimación Blackman-Tukey.

De esta manera, los algoritmos para obtener los coeficientes del filtro Wiener son los dados por las fórmulas (15), (19), (20) y (22) en su versión bidimensional, todo mediante la estimación de la PSD de las imágenes y de acuerdo a la cantidad de información que se posea de la imagen por filtrar.

**Conclusiones**

El cálculo de los coeficientes WIENER, así como las características propias del filtro para obtener una buena estimación, presentan una carga computacional muy grande; la transformada de Fourier Bidimensional por el algoritmo de Renglón - Columna, requiere  $N^*M$  transformadas, es decir, para una imagen de  $256 * 256$  pixeles se requieren 64K transformadas de Fourier de una dimensión, de 256 puntos.

Si además se recuerda que para la convolución debe duplicarse el número de muestras (Regla del límite superior para una convolución  $N + M - 1$ ), para una imagen de  $256 * 256$  pixeles se necesitan dos transformadas de Fourier de  $512 * 512$  (suponiendo el algoritmo de convolución rápida).

Por otra parte, la cantidad de memoria requerida también sobrepasa los escasos 640K que permite el DOS, lo que deriva en que se tenga que recurrir al uso de algoritmos para el manejo del disco duro o en su defecto, programación utilizando la memoria extendida.

Estos argumentos hacen de éste un filtro pocas veces implantado; sin embargo, representa una herramienta importante para el análisis de señales aleatorias. Además, como tiene la capacidad de detectar una señal en presencia de distorsión y ruido, este algoritmo también puede ser utilizado para reconocimiento de señales aleatorias.

**NOTA:** La minimización del error cuadrático medio, también se emplea en las redes neuronales Adaline y Madaline. Por consiguiente, tales redes pueden considerarse como versiones adaptivas del filtro Wiener.

La aplicación a filtrado y restauración de imágenes se dió como parte del trabajo elaborado sobre tratamiento de imágenes que llevado a cabo en el CINTEC, y se menciona únicamente como una posibilidad de aplicación para estos filtros.

---

### *Bibliografía*

---

- [1] Simon Haykin. *"Adaptive Filter Theory Second Edition"*. Prentice Hall.
- [2] Anil J. Kain. *"Fundamentals of Digital Image Processing"*. Prentice Hall.
- [3] Charles W. Therrien. *"Discrete Random Signals And Statistical Signal Processing"*. Prentice Hall.
- [4] Carl W Helstrom. *"Probability And Stochastic Processing for Engineers"*. Macmillan Publishing Company.
- [5] Lawrence Rabiner, Bernard Gold. *"Theory and Application of Digital Signal Processing"*. Prentice Hall.
- [6] John R Treichler, C. Richard Johnson. *"Theory and Design of Adaptive Filters"*. John Wiley And Sons.