Comparación de los Sistemas Convencionales de Control y los Sistemas Difusos

M. en C. Miguel Angel Partida Tapia ✞
Subdirector Académico y de Investigación del CINTEC-IPN.
Jorge Eduardo Piña Tovar
León Fernando Romero Antiga
Rafael Noriega Ortiz
Estudiantes de la Maestría del CINTEC -IPN

El presente artículo muestra un ejercicio de análisis y comparación de los sistemas convencionales de control y los sistemas actuales, basados en la logica difusa. Este trabajo toma como ejemplo práctico la aplicación de estos sistemas al problema del Pendulo Invertido.

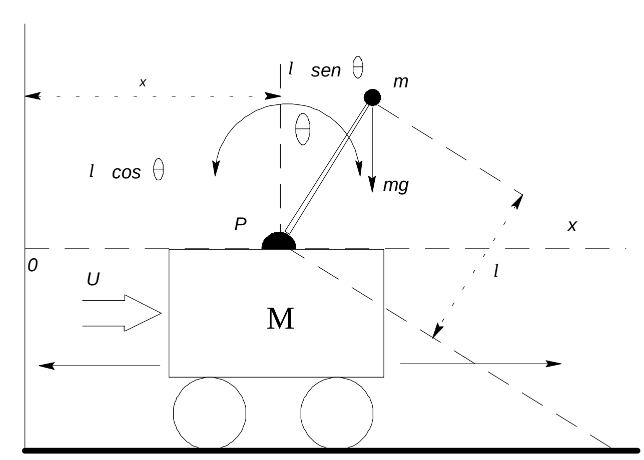


Figura 1. Trayectoria de un móvil en el plano tridimensional.

I.- Controladores Convencionales

En este tipo de controladores se utilizan modelos matemáticos, que demuestran teoricamente ser muy precisos y exactos. Estos modelos se basan en ecuaciones diferenciales del problema, en las cuales se deben de ajustar todos los parámetros para cada comportamiento a requerir o controlar.

Planteamiento del Fenómeno Físico

La **figura 1** muestra la Trayectoria de un movil en el plano tridimensional. El desarrollo siguiente, se realiza en base a un problema clásico de control : El péndulo invertido, el cual se describe a continuación.

El problema a resolver es mantener siempre en posición vertical la masa junto con la varilla, tratando de mover el carro para lograrlo. El péndulo esta sostenido por una chumacera, encima de un carro que a su vez tiene movimiento por medio de un sistema de deslizamiento dinámico, por lo cual éste puede adoptar dos tipos de direcciones sobre el plano x, y que afecta directamente con el ángulo teta del péndulo con respecto a la normal o eje vertical. El planteamiento que propone el control convencional, es desarrollar ecuaciones diferenciales relacionando la posición en el plano x del carro, la velocidad angular y el ángulo teta del péndulo.

Planteamiento de las Fórmulas para Control Convencional

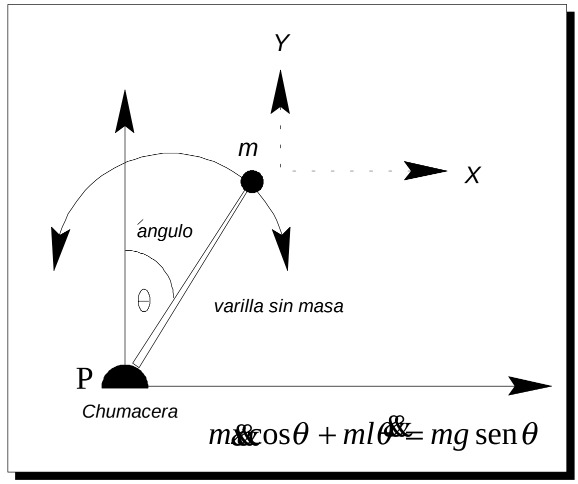
Las siguientes son las fórmulas derivadas en caso de utilizar el método de Laplace

Análisis del Cuerpo Libre

$u =$ Fuerza de Control $x_g = x + l\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\theta =$ ángulo pequeño $y_g = l\cos\theta$

Nota: Debido a la extensión del desarrollo matemático contenido en este artículo, se decidió modificar el diseño acostumbrado de 3 columnas por el de una columna.

Análisis desarrollando la 2ª Ley del Movimiento Rotacional que influye solo a "m" con respecto a un punto "P", multiplicando y eliminando términos simétricos.



Para "m" en "x" y "y", de (1) y (2) y tomando en cuenta que el péndulo se debería de conservar en posición vertical, se considera que θ y $\dot{\theta}$ en consecuencia son pequeños y se pueden sustituir de la siguiente manera.

$$\mathcal{L}\left[m\frac{d^2y}{dt^2}\right] = m\left[s^2y(s) - sy(\theta) - \dot{y}(\theta)\right]$$

$$\text{si } y = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \therefore$$

$$\mathcal{L}\left[m\frac{d^2y}{dt^2}\right] = (ms)\,y(s)$$

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) \; ; \text{ para que } m = \text{ constante}$$

$$\bar{F} = m d\bar{v} \; ; \; F = \frac{d\dot{\bar{r}}}{dt} \; ; \; \bar{F} = m\ddot{\bar{r}}$$

$$\bar{F} = \overline{m}\bar{a} \; ; \text{ Ecuación diferencial de movimiento de la partícula o punto de masa.}$$

Por la segunda Ley de Newton en dirección "x" del movimiento

$$\bar{F} = \overline{m}\bar{a} \quad \text{Se sustituye}$$

$$u = M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2xy}{dt^2} \; ; \; u = M\frac{d^2x}{dt} + m\frac{d^2}{dt^2}(xy) \text{ se sustituye } xy = (x + l\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$u = M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$(a) \quad dx(\mathrm{sen}\,\theta) = \cos\theta\, dx\dot{\theta} \text{ por regla de la cadena}$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{sen}\,\theta = (\cos\theta)\theta \quad ; \quad \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{sen}\,\theta = (-\mathrm{sen}\,\theta)\dot{\theta} + (\cos\theta)\ddot{\theta}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dt}\cos\theta = -(\mathrm{sen}\,\theta)\dot{\theta} \; ; \quad \frac{d^2}{dt^2}\cos\theta = -(\cos\theta)\dot{\theta} - (\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{\theta}$$

Desarrollando de la 2" Ley de Newton para movimiento de M y m en "x"

$$M\frac{d^2}{dt^2}x + \left[m\frac{d^2}{dt^2}x + (m\frac{d^2}{dt^2}l\,\mathrm{sen}\,\theta)\right] = u$$

$$M\frac{d^2}{dt^2}x + \left[\left(m\frac{d^2}{dt^2}x\right) + ml(-(\mathrm{sen}\,\theta)\dot{\theta} + (\cos\theta)\ddot{\theta})\right] = u$$

$$= M\ddot{x} + [m\ddot{x} - ml(\mathrm{sen}\,\theta)\dot{\theta} + ml(\cos\theta)\ddot{\theta}] =$$

$$= M\ddot{x} + m\ddot{x} - ml(\mathrm{sen}\,\theta)\dot{\theta} + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} =$$

$$(1) \rightarrow (M + m)\ddot{x} - ml(\mathrm{sen}\,\theta)\dot{\theta} + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} = u \text{ para mov. en "x"}$$

$$\frac{m\frac{d^2xg}{dt^2}l\cos\theta - m\frac{d^2yg}{dt^2}l\,\mathrm{sen}\,\theta}{l\,\mathrm{sen}\,\theta}=mg$$

$$m\frac{d^2xg}{dt^2}(l\cos\theta)-m\frac{d^2yg}{dt^2}(l\,\mathrm{sen}\,\theta)=mgl\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$w=mgl\,\mathrm{sen}\,\theta=peso \quad ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

se sustituye "xg" y "xy"

$$\left[m\frac{d^2}{dt^2}(x+l\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]l\cos\theta-\left[m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta)\right]l\,\mathrm{sen}\,\theta=mgl\,\mathrm{sen}\,\theta$$

de (a) y (b) Se desarrolla de la siguiente manera.

$$\left[\left[m\frac{d^2}{dt^2}x\right]+\left[ml\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{sen}\,\theta\right]l\cos\theta\right]-\left[\left[ml\frac{d^2}{dt^2}\cos\theta\right]l\,\mathrm{sen}\,\theta\right]=mgl\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$\left[m\ddot{x}+\left[ml\left[(-\mathrm{sen}\,\theta)\theta^2+(\cos\theta)\ddot{\theta}\right]l\cos\theta\right]\right]-\left[\left[ml-(\cos\theta)\dot{\theta}^2-(\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{\theta}\right]l\cos\theta\right]=mgl\,\mathrm{sen}\,\theta$, Reduciendo

$$\left[m\left[\ddot{x}-l(\mathrm{sen}\,\theta)\dot{\theta}^2+l(\cos\theta)\ddot{\theta}\right]l\cos\theta\right]-\left[m\left[-l(\cos\theta)\dot{\theta}^2+l(\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{\theta}\right]l\,\mathrm{sen}\,\theta\right]=lmg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$\mathrm{sen}\,\theta\approx\theta \quad \cos\theta\approx 1 \qquad \ddot{x}(M+m)+lm\ddot{\theta}=u \quad \rightarrow(3)$

$\theta\dot{\theta}^2\approx\theta \qquad m\ddot{x}+lm\ddot{\theta}=mg\theta \quad \rightarrow(4)$

si Restamos (3) y (4) para eliminar terminos

$$[\ddot{x}(M+m)+lm\ddot{\theta}-u]-[m\ddot{x}+lm\ddot{\theta}-mg\theta]=[M\ddot{x}+m\ddot{x}+lm\ddot{\theta}-u]-[m\ddot{x}+lm\ddot{\theta}-mg\theta]=M\ddot{x}-u+mg\theta$$

$M\ddot{x}=u-mg\theta \quad \rightarrow(5)$ De (3) y (5) se elimina $\ddot{x}$ y se multiplican

$Ml\ddot{\theta}-(M+m)g\theta+u=\theta \quad \rightarrow(6)$ Si se resuelve por funciones de transferencia tenemos

$\frac{\theta_{(s)}}{-U_{(s)}}=\frac{1}{Mls^2-(M+m)g} \quad \rightarrow(7)$ De (3) y (4) Se derivan las siguientes variables de estados como:

$x_1=\theta$; $x_2=\dot{\theta}$; $x_3=x$; $x_4=\dot{x}$ $\therefore$ $\dot{x}1=x2$; $\dot{x}2=\frac{(M+m)}{Ml}gx_1-\frac{1}{Ml}u$; $\dot{x}3=x4$; $\dot{x}4=\frac{m}{M}gx_1+\frac{1}{M}u$

por matrices.

Como se desea que el sistema de péndulo invertido sea autocorregible, se pueden aplicar las siguientes ecuaciones de control convencional para manejar y controlar la salida del sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

Como se considera que θ y x, como salidas se tienen.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{Entonces.} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx + Du$

x = vector de estado	A = Matriz de nxn
u = vector de control	B = Matriz de nxr
y = vector de salida	C = Matriz de mxn
	D = Matriz de mxr

y esta dada por: $x(t)e^{A}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\partial)} Bu(\partial)d(\partial)$ y para

$$y(t) = Ce^{At}X(0) + c\int_0^t e^{A(t-\partial)} Bu(\partial)d(\partial) + Du$$

En matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{M+m}{ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como es un sistema de lazo cerrado; se toma como retroalimentaci n:

$u = -Kx$ donde: $K = (\alpha_n - a_n)T^{-1}$

T^{-1} = inversa Matriz = $(\alpha_n - a_n)$

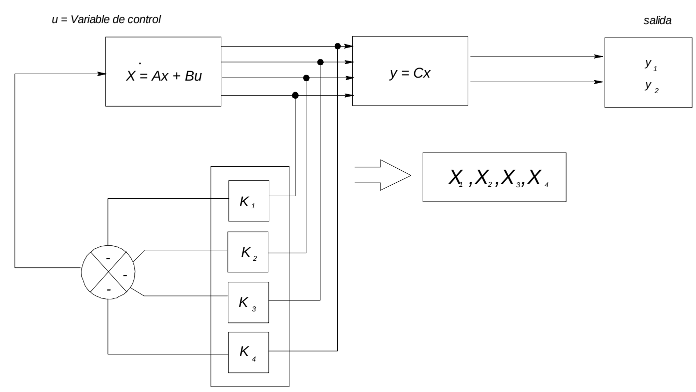
Un sistema de control convencional como el anterior, esta propenso a condiciones poco estables, agregando que sus parámetros no son tan exactos; en la ecuación final se detecta fácilmente que los parámetros determinan totalmente el tipo de dispositivos para el control, lo que provoca que el sistema sea muy sensible a señales de ruido.

II.- Controladores Difusos

Introducción

Los controladores diseñados con lógica difusa, tratan de imitar el comportamiento humano; así como aprender de sus experiencias. Las siguientes son diversas metodologías de diseño Fuzzy, de acuerdo a diversos autores.

Diagrama de bloques deducido por las f rmulas



Bloque, Retroalimentaci n variables y constantes

I. Sucesión de diseño (H.J Zimmermann)

1.- Definición de entradas y variables de control.
2.- Definición de reglas y fuzzy sets.
3.- Desarrollo del mecanismo de inferencia.
4.- Selección de la estrategia de fuzzificación .

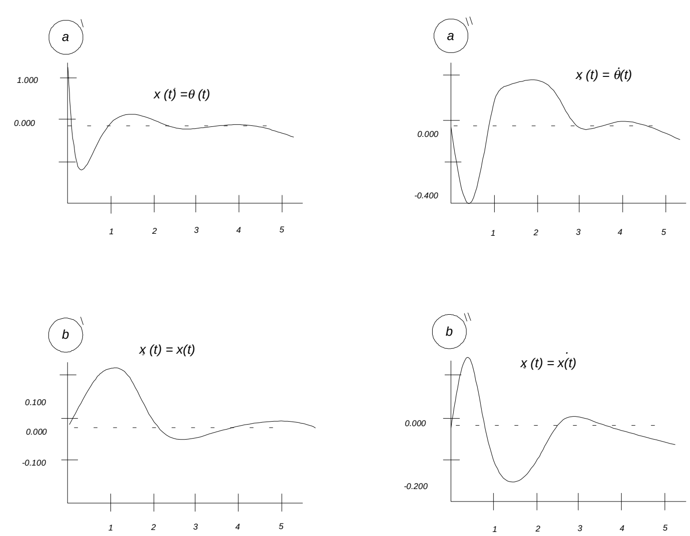
II. Proceso Fuzzy (Greg Viot)

1.- Fuzzificación de entradas.
2.- Evaluación de reglas.
3.- Defuzzificación de salidas.

III. Configuración básica del modelado Fuzzy (Li-Xing-Wang)

1.- Interface de fuzzificación.
2.- Reglas basadas en fuzzy.
3.- Máquina de inferencia fuzzy.
4.- Interface de defuzzificación.

Prácticamente no existe una teoría que indique los pasos a seguir del control Fuzzy; sin embargo, es posible establecer una metodología de diseño que permita diseñar en orden, sobre todo ahorrar tiempo y evitar problemas en el desarrollo de los sistemas de control.



Representaci n grÆfica de la respuesta de retroalimentaci n, determinada por la matriz K

Un método aceptable propuesto por los autores para un sistema industrial es el siguiente:

Las técnicas que un operador aprende en base a su experiencia, le sirven para controlar de mejor manera cualquier proceso complejo. Estas pueden ser expresadas como un conjunto de reglas Fuzzy de la siguiente forma: Condición -Acción, que no son otra cosa que términos lingüísticos que describen a los diferentes procesos.

A).- Observar al trabajador experto operando el proceso.

Observación del proceso y/o sistema físico a desarrollar , repitiendo este proceso cuentas veces sea necesario.

Se deben de tomar en cuenta la táctica y estrategia que utiliza el operador, la secuencia que sigue para todos los procesos, la velocidad en que estos se realizan, asi como realizar el estudio de tiempos y movimientos, y considerar los aspectos ergonómicos del lugar de trabajo.

B).- Cuestionar al operador de dicho proceso.

Interrogar a los operadores del proceso a realizar, algunas de las dudas que surgieron en el paso anterior. Una de las tácticas más importantes son las de tomar en cuenta las opiniones de los operadores
para que nos ayuden a realizar de manera más eficaz el proceso de control.

C).- Definición del modelo funcional y las características de operación.

Determinar la arquitectura característica del sistema, describiendola en términos de un modelo entrada-proceso-salida.

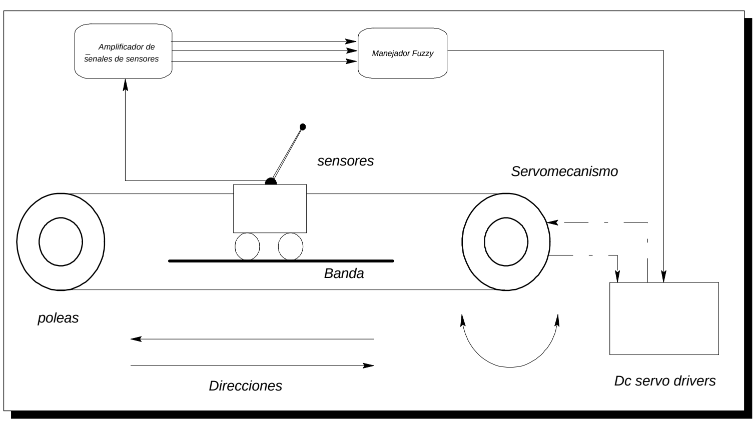
Lógica Difusa para Control Aplicada al Pendulo Invertido

Regresando al ejemplo de péndulo invertido, para mantener el equilibrio del péndulo se debe desplazar el carro de un lado hacia el otro del eje x, para compensar los movimientos del péndulo.

Para la realización de este sistema se considera un motor que realice este proceso. Este motor debe de tener una señal de control como el voltaje, que determina la velocidad y el sentido del giro.

Establecimiento de variables de control:

1.- Ángulo teta.
2.- Incremento de desplazamiento. Delta del ángulo.
3.- El voltaje aplicado al motor, Vm (+ , -).



Implantación de un Sistema de Control Difuso con Servomecanismos

Como se observa se tienen dos estados variables Fuzzy y una variable para el control.

- Un primer estado variable Fuzzy es el ángulo del péndulo con la vertical. Se tiene un ángulo nulo cuando el ángulo es cero. Los ángulos positivos se consideran hacia el lado derecho y los negativos hacia el izquierdo con respecto a la vertical , y su intervalo es de -90 a +90 grados.

-Un segundo estado variable, es la velocidad angular de la delta, y se define como la diferencia entre el ángulo presente medido y el ángulo previo medido.

La diferencia de ángulos puede tomar valores positivos y negativos, por lo tanto el intervalo será desde +90 a -90 grados.

-La variable de control Fuzzy será el voltaje del motor Vm. Si el péndulo cae para la izquierda el voltaje será negativo, si está en equilibrio o en posición vertical el voltaje Vm es cero o nulo.

-Se utiliza un motor de +10 volts de C.D.

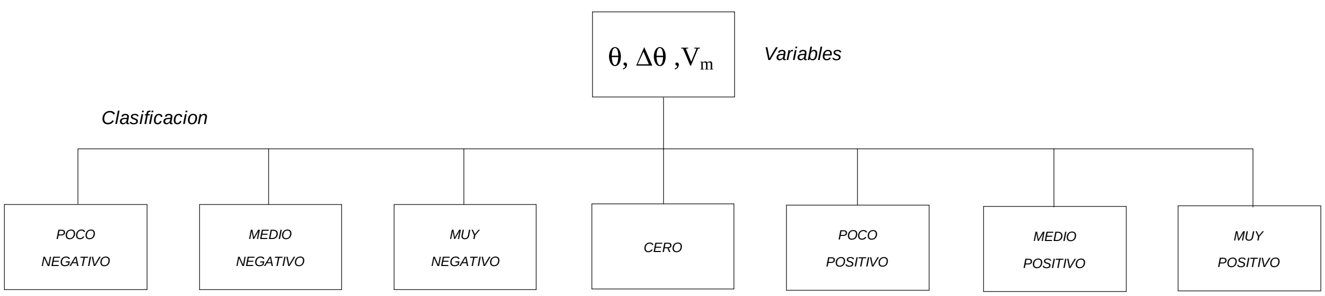
Variable	Intervalo de trabajo o universo de discurso
Ángulo	-90 < ángulo < +90
Incremento de ángulo	-90 < ángulo < +90
Vm	-10v < Vm < +10v

-Variables de control y de estado con sus respectivos intervalos.

D).- Fuzzificar entradas derivadas del proceso.

Se definen la fuente de control y los "Fuzzy Sets" como la asociación de entradas del sistema entre un grupo de clasificaciones cuantitativas. Para este artículo y otros semejantes se continuará empleando el término "fuzzy sets", dado que en el idioma Español no existe una equivalencia directa y universalmente aceptada.

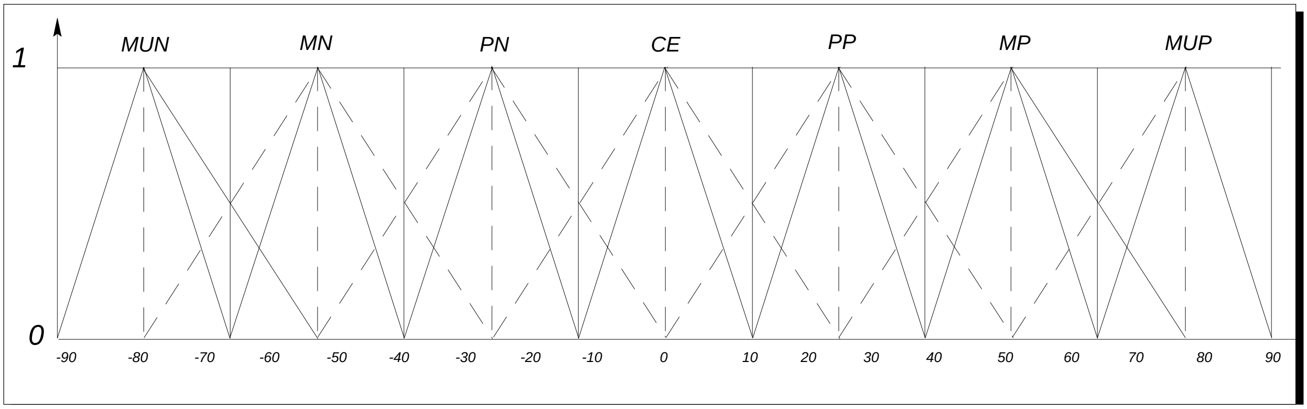
-Clasificación de las variables: ángulo, incremento del ángulo (delta) y Vm.



Aunque se detecta que todas las variables tienen características similares, no todos los sistemas se clasifican así, y pueden tomar valores distintos. Esta clasificación debe de ser graficada. El proceso consiste en representar las variables linguisticas obtenidas anteriomente con curvas que relaciónen entre los fuzzy sets, los valores de ángulo, los incrementos del ángulo (delta) y Vm.

Fuzzy sets	Conjuntos de elementos
MUY NEGATIVO (MUN)	-90 <= MUN <= +90 grados.
MEDIO NEGATIVO (MN)	-65 <= MU <= -35 grados.
POCO NEGATIVO (PN)	-35 <= PN <= -10 grados.
CERO (CE)	-10 <= CE <= 10 grados.
POCO POSITIVO (PP)	10 <= PP <= 35 grados.
MEDIO POSITIVO (MP)	35 <= MP <= 65 grados.
MUY POSITIVO (MUP)	65 <= MUP <= 90 grados.

-Trazo de las curvas que relacionan Fuzzy sets con valores de variables.



El concepto de Función miembro es el de cada una de las figuras triangulares resultantes del proceso de graficación de las variables.

Relación entre las entradas y salidas del sistema.

Ejemplo: Para el péndulo invertido.

ángulo = -55 ^{0} grado de miembro MUN de M = 0.2
MU de M = 0.8

Nota: Los grados de pertenencia de una variable a funciones de miembro complementarias deben de sumar 1.

Cálculo de una función miembro:

$$\text{Pendiente } 1 = m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{-50-(-77.5)} = 0.036$$

$$\text{Pendiente } 1 = m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{-50-(-22.5)} = -0.036$$

$$\text{Delta 1} = \text{x - Punto 1} = -55-(-77.5) = 22.5$$

$$\text{Delta 2} = \text{Punto 2 - x} = -22.5-(-50) = 27.5$$

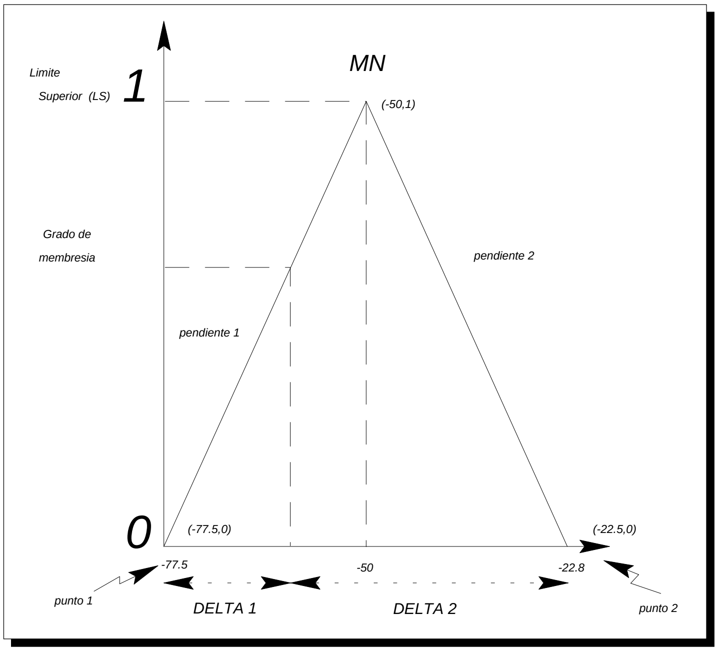
$$\begin{aligned}\text{Grado de Miembro} &= \text{valor m nimo de (delta1 * m1, delta2 * m2, LS)}\\ &= \text{valor m nimo de ((22.5)(0.036),(27.5)(0.036),1)}\\ &= \text{valor m nimo de (0.81,099,1)}\\ &= 0.81\end{aligned}$$

$$\therefore \quad M = 0.81$$

E).- Producción de reglas de control.

Definición del comportamiento de las fuentes de control. (condición - acción), (si-entonces).

-Generalmente, el número de reglas Fuzzy esta relacionado con un número de variables de control.



El sistema de péndulo invertido tiene dos controles variables: el ángulo y la velocidad angular; Sin embargo, se eligieron 7 regiones Fuzzy, lo que da un total de 7 * 7 = 49 combinaciones de entrada, por lo que el sistema requiere de 49 reglas Fuzzy para controlar el péndulo eficientemente.

F).- Desarrollo de reglas de inferencia.

Establecimiento de fórmulas, las cuales son decisiones lógicas a través de la evaluación de reglas fuzzy determinando las salidas.

I.- Reglas Fuzzy. (Establecimiento)

Regla 1: Si (ángulo= CE) y
(Incremento del áng. = CE)
entonces (Vm = CE).
Regla 2: Si (ángulo= CE) y
(incremento del áng. = PN)
entonces (Vm = PN).
Regla 3: Si (ángulo= CE) y
(incremento del áng. = MN)
entonces (Vm= MN).
.
.
.
Regla 8: Si (ángulo= PN) y
(incremento del áng. = CE)
entonces (Vm = PN).
.
.
Regla 49:Si (ángulo= MUN) y
(incremento del äng. = MUP)
entonces (Vm= CE).

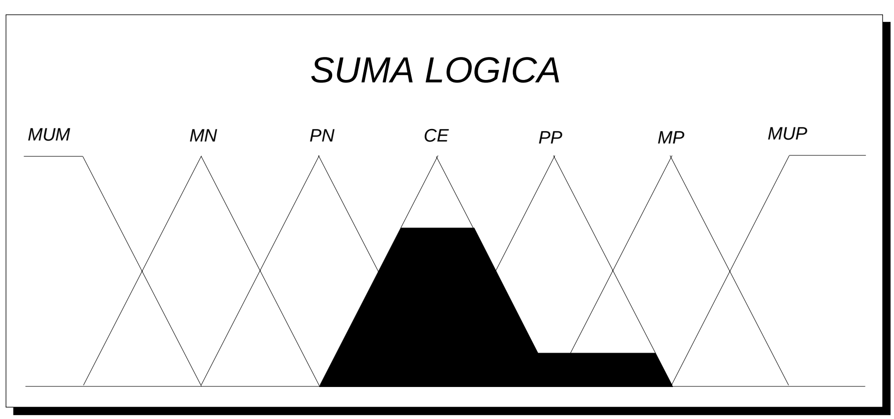
El formato anterior ejemplifica la representación de las reglas Fuzzy.

II.-Producto lógico

Valor mínimo de todos los grados de membresía. En la Regla 1 es de 0.81 de ángulo.

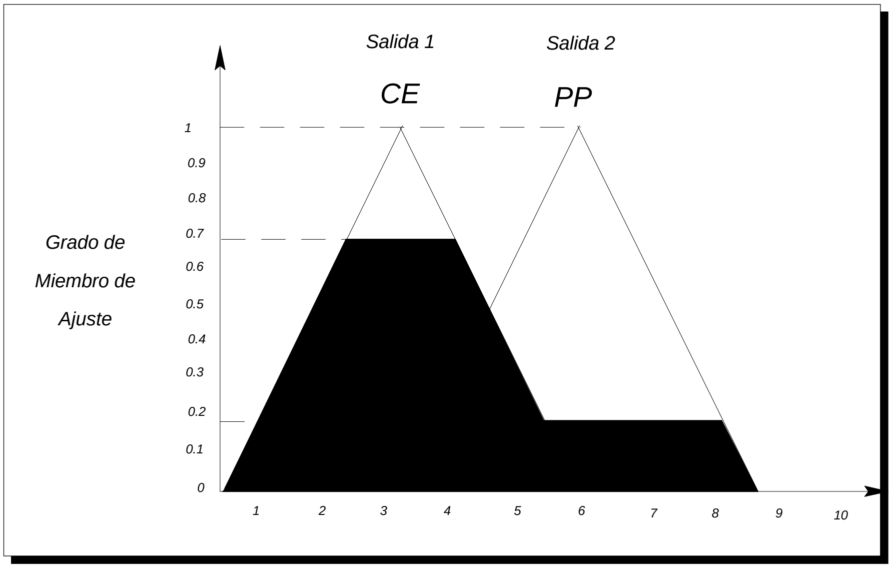
III.- Suma lógica

Combina los resultados de las reglas. El área sombreada es el resultado para los valores de entrada (ángulo = -30^0 e incremento = 30^0).



G).- Defuzzificación de salidas para el control

Proceso mediante el cual el resultado obtenido, en el proceso de inferencia es transformada en un valor numérico.



1.- Ejemplo utilizando el método de centro de gravedad.

a) Determinar un punto central sobre el eje x. para cada función de miembro de salida.

b) Se toma en cuenta el grado de miembros de ajustes, obtenido con el producto lógico para cada función de miembro.

c) Se calculan las áreas de las funciones de miembro.

d) Finalmente la salida de fuzzificación es derivada de un término promedio o término pesado de los puntos centrales del eje x y las areas calculadas.

Defuzzificación:

Salida 1

a) Eje-x; punto central = 2.75
b) Grado de ajuste = 0.7
c) Área sombreada

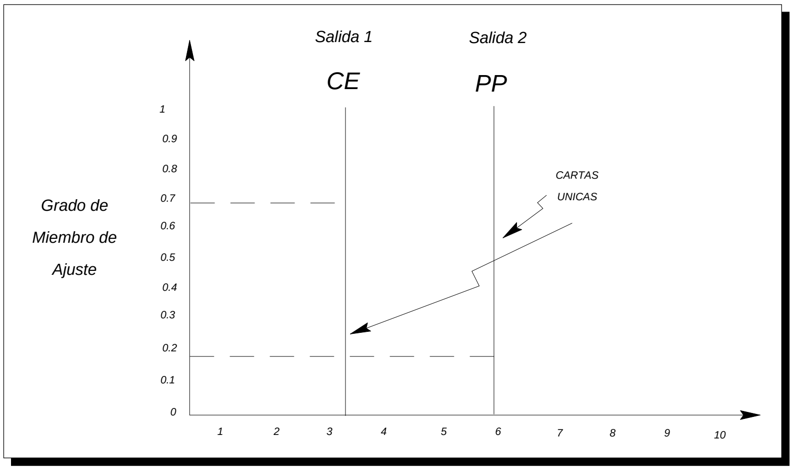
$$A_1 = \left(\frac{5.5 + 1.7}{2}\right)0.7 = 2.52$$

Salida 2

a) Eje-x; punto central = 5.5
b) Grado de ajuste = 0.2
c) Área sombreada

$$A_2 = \left(\frac{6 + 4.8}{2}\right)0.2 = 1.08$$

$$\text{d) Termino medio pesado} = \frac{(A_1 * \text{ punto central 1}) + (A_2 * \text{ punto central 2})}{A_1 + A_2} = 3.5$$



2.- Ejemplo utilizando el método de las cartas únicas.

Se simplifica el proceso de defuzzificación de la función miembro de salida, el cual representa una sola línea vertical que intersecta al eje x en un solo punto. El cálculo del centro de gravedad se reduce al cálculo del término promedio de los puntos centrales del eje x y los grados de ajuste.

Defuzzificación:

Salida 1	Salida 2
a) Eje-x; punto central (PC1) = 2.75	a) Eje-x; punto central (PC2)= 5.5
b) Grado de ajuste (GA1) = 0.7	b) Grado de ajuste (GA2)= 0.2

$$\text{c) Termino medio pesado} = \frac{(GA1 * PC1) + (GA2 * PC2)}{GA1 + GA2} = 3.3$$

Referencias

[1] Zadeh, L.A., 1968, "FUZZY algorithm", informe y control, vol. 12, pag. 94-102.

[2] Tang,K.L.,and Mulholland,R.J., 1987, "Comparing FUZZY logic with classical controller design".

[3] H. J Zimmerman, "Fuzzy sets theory & it's application".

[4] Katsuhiko Ogata, "Ingeniería de Control Moderna".

[5] José Solar González, "Cinemática y dinámica para ingenieros".

[6] Dennis G. Zill, "Ecuaciones Diferenciales".

[7] James G. Holbrook, "Transformadas de Laplace para Ingenieros en Electrónica".